

Составить уравнение касательной к кривой $y = \ln(x-1)$, перпендикулярной прямой, образующей с положительным направлением оси Ox угол 135° .

Решение.

1. Поскольку касательная \perp прямой, образующей с Ox угол 135° , то её угловой коэф-т

$$k = \operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1.$$

Тогда угловой коэф-т касательной

$$k_{\text{кас}} = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{-1} = 1.$$

2. Найдем точку касания. из уравнения $f'(x_0) = k_{\text{кас}}$.

$$f'(x) = (\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1} \cdot (x-1)' = \frac{1}{x-1}.$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0-1} = 1, \quad x_0-1 = 1, \quad x_0 = 2.$$

$$y_0 = y(2) = \ln(2-1) = \ln 1 = 0.$$

Точка касания $M(2; 0)$

3. Составим уравнение касательной.

$$y - y_M = k_{\text{кас}}(x - x_M)$$

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 2), \quad y = x - 2, \quad x - y - 2 = 0.$$

Ответ: $x - y - 2 = 0$.

Составить уравнения касательных к кривой $y = \frac{x-3}{x+2}$, перпендикулярных прямой $x+5y=0$. Сделать чертеж.

Решение.

1. Найдем угловой коэф-т прямой $x+5y=0$.

$$5y = -x, \quad \text{э}y = -\frac{1}{5}x \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{5}.$$

Т.к. касательные \perp к данной прямой, то $k_{\text{кас}} = -\frac{1}{k_1}$.

$$\text{Получаем, } k_{\text{кас}} = -\frac{1}{-\frac{1}{5}} = 5.$$

2. Найдем точку касания.

Из геометрического смысла производной следует, что

$f'(x_0) = k_{\text{кас}}$ Из этого уравнения найдем x_0 .

$$f'(x) = \left(\frac{x-3}{x+2}\right)' = \frac{(x-3)'(x+2) - (x-3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1 \cdot (x+2) - (x-3) \cdot 1}{(x+2)^2} = \\ = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$f'(x_0) = \frac{5}{(x_0+2)^2} = 5, \quad \frac{1}{(x_0+2)^2} = 1, \quad (x_0+2)^2 = 1, \quad x_0+2 = \pm 1.$$

Получаем две точки касания.

$$1) \quad x_0 = -1$$

$$y_0 = \frac{-1-3}{-1+2} = -4$$

$$M_1(-1; -4)$$

$$2) \quad x_0 = -3$$

$$y_0 = \frac{-3-3}{-3+2} = 6$$

$$M_2(-3; 6)$$

3. Составим уравнения касательных

$$1) \quad y+4 = 5(x+1) \dots\dots$$

$$5x - y + 1 = 0$$

$$2) \quad y-6 = 5(x+3) \dots\dots$$

$$5x - y + 21 = 0$$

Ответ: $5x - y + 1 = 0$
 $5x - y + 21 = 0$