Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n \cdot (n+2)} \cdot x^n$$

Решение.

Находим радиус сходимости ряда по формуле $R = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|$,

где $C_n = \frac{n}{5^n \cdot (n+2)}$, $C_{n+1} = \frac{n+1}{5^{n+1} \cdot (n+3)}$.

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{5^n \cdot (n+2)} : \frac{n+1}{5^{n+1} \cdot (n+3)} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{5^{n+1}}{5^n} \cdot \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \right| =$$

$$= 5 \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{3}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = 5 \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = 5.$$

Радиус сходимости $R = 5$, значит интервал сходимости $(-5; 5)$.

Выясним поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -5$ степенной ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n \cdot (n+2)} \cdot (-5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n \cdot 5^n}{5^n (n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}.$$

Полученный ряд является знакочередующимся. Применим к нему признак Лейбница.

Первое условие признака Лейбница (члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине) не выполняется:

$$\frac{1}{3} < \frac{2}{4} < \frac{3}{5} < \frac{4}{6} < \frac{5}{7} < \ldots$$

Следовательно, ряд расходится.

При $x=5$ степенной ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n \cdot (n+2)} \cdot 5^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}.$$

Полученный ряд является знакоположительным.

Применим к этому ряду необходимый признак сходимости.

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0$, то необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, ряд расходится.

Итак, область сходимости исследуемого ряда $(-5; 5)$.

Ответ: $(-5; 5)$.