Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение.

Найдем главный определитель системы Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 100 - 84 - 105 + 16 + 90 = -1$$

Т.к. $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение. Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 0 - 24 - 30 + 8 - 0 = -55$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 + 50 - 14 - 0 + 8 + 15 = 59$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 20 + 0 - 21 - 0 - 60 = -49$$

Теперь по формулам Крамера находим решение

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-55}{-1} = 55 \; ; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{59}{-1} = -59 \; ; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-49}{-1} = 49.$$

Проверка:

$$2 \cdot 55 + 6 \cdot (-59) + 5 \cdot 49 = 110 - 354 + 245 = 355 - 354 = 1.$$
$$5 \cdot 55 + 3 \cdot (-59) - 2 \cdot 49 = 275 - 177 - 98 = 275 - 275 = 0.$$
$$7 \cdot 55 + 4 \cdot (-59) - 3 \cdot 49 = 385 - 236 - 147 = 385 - 383 = 2.$$

Ответ: $(55; -59; 49)$

Решить систему уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ 3x + z = 9, \\ 2x + 4y + 5z = 6. \end{cases}$$

Решение.

Введем обозначения: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Тогда в матричной форме данная система имеет вид $A \cdot X = B$, а ее решение $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем определитель матрицы A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 36 + 4 - 0 - 4 - 30 = 6$$

Т.к. $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная, и существует обратная матрица A^{-1}, которую находим по алгоритму:

1. $|A| = 6$.

2. $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

3. Находим алгебраические дополнения A_{ij}:

$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4$ $\quad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$ $\quad A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -13$ $\quad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8$

$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12$ $\quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -13 & -1 & 8 \\ 12 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -13 & -1 & 8 \\ 12 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -12 + 18 + 12 \\ -39 - 9 + 48 \\ 36 + 0 - 36 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(3; 0; 0)$.

Не забываем делать проверку.

Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -2, \\ -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 13 & 5 & -4 \\ 0 & -19 & -8 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 247 & 95 & -76 \\ 0 & -247 & -104 & 78 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 13 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 2 \end{array}\right)$$

2⊢⊣ − 1⊢⊣ ∗ 2   2⊢⊣ ∗ 19   3⊢⊣ + 2⊢⊣

3⊢⊣ + 1⊢⊣ ∗ 3   3⊢⊣ ∗ 13

По полученной матрице составим равносильную систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - x_3 = 1, \\ 13x_2 + 5x_3 = -4, \\ -9x_3 = 2. \end{cases}$$ Из 3-го ур-я находим $x_3 = -\frac{2}{9}$.

Из второго уравнения находим x_2.

$13x_2 = -4 - 5\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)$; $\quad 13x_2 = -\frac{26}{9}$, $\quad x_2 = -\frac{2}{9}$.

И из первого ур-я $x_1 = 1 + 5\cdot\left(-\frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{9-10-2}{9} = -\frac{3}{9}$.

Следовательно, решение имеет вид $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{9}; -\frac{2}{9}\right)$.

Проверка: $-\frac{1}{3} + \frac{10}{9} + \frac{2}{9} = \frac{9}{9} = 1$

$-\frac{2}{3} - \frac{6}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{18}{9} = -2$

$\frac{3}{3} + \frac{8}{9} + \frac{10}{9} = \frac{27}{9} = 3$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{9}; -\frac{2}{9}\right)$.

Запись 2⊢⊣ − 1⊢⊣ ∗ 2 означает, действие вычитания из второй строки соответственных элементов первой строки умноженных на два.

Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Найти одно из её базисных решений.

Решение.

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 24 & -33 & 12 & 3 \\ 0 & 8 & -11 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 24 & -33 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2⊢ − 1⊢ * 7
3⊢ − 1⊢ * 2

3⊢ * 3 − 2⊢

Т.к. $r = 2$ меньше числа переменных системы, то по теореме Кронекера-Капелли система линейных уравнений неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Выберем x_1 и x_2 за базисные переменные, т.к. базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 24 \end{vmatrix} \neq 0$, а x_3 и x_4 за неосновные.

По полученной матрице составим равносильную систему ур-ий и выразим базисные переменные через неосновные.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 - 4x_3 + x_4 \\ 24x_2 = 3 + 33x_3 - 12x_4 \end{cases}$$

Из 2-го ур-я найдем x_2.

$x_2 = \frac{1}{8} + \frac{11}{8}x_3 - \frac{1}{2}x_4$, тогда $x_1 = 1 - 4x_3 + x_4 + \frac{3}{8} + \frac{33}{8}x_3 - \frac{3}{2}x_4$

$x_1 = \frac{11}{8} + \frac{1}{8}x_3 - \frac{1}{2}x_4.$

Пусть $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$; c_1 и c_2 – некоторые числа.

Тогда $x_1 = \frac{11}{8} + \frac{1}{8}c_1 - \frac{1}{2}c_2$, $x_2 = \frac{1}{8} + \frac{11}{8}c_1 - \frac{1}{2}c_2$

Решение системы, в котором неосновные переменные равны нулю называется базисным.

Значит, при $x_3 = x_4 = 0$, получаем

$x_1 = \frac{11}{8}$, $x_2 = \frac{1}{8}$.

Проверка

$\frac{11}{8} - \frac{3}{8} + 0 - 0 = \frac{8}{8} = 1$.

$\frac{77}{8} + \frac{3}{8} - 0 + 0 = \frac{80}{8} = 10$

$\frac{22}{8} + \frac{2}{8} - 0 + 0 = \frac{24}{8} = 3$

Ответ: Общее решение $\left(\frac{11}{8} + \frac{1}{8}c_1 - \frac{1}{2}c_2;\ \frac{1}{8} + \frac{11}{8}c_1 - \frac{1}{2}c_2;\ c_1;\ c_2\right)$;

базисное решение $\left(\frac{11}{8};\ \frac{1}{8};\ 0;\ 0\right)$.

Методом Гаусса решить однородную систему линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Найти фундаментальную систему решений.

Приведем основную матрицу системы к ступенчатому виду

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$

3 — 2
2 — 1 * 3

Т.к. $r(A) = 3$ меньше числа неизвестных системы уравнений, то фундаментальная система решений состоит из одного $(4-3=1)$ решения.

Пусть x_1, x_2, x_3 – основные переменные, т.к. базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, а x_4 - неосновная переменная.

Составим СЛОУ равносильную данной, получим

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 - 18x_4 = 0 \\ -2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -5x_4 \\ x_2 - 3x_3 = 18x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$

Для нахождения фундаментального решения e_1 заменим неосновную переменную x_4 строкой невырожденой квадратной матрицы первого порядка $(4-3=1)$, например, единичной $E_1 = |1|$.

Получаем, $x_4 = 1$ и система принимает вид

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ x_2 - 3x_3 = 18 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Обратным ходом метода Гаусса найдем фундаментальное решение.

$x_2 = 18 + 3x_3 = 18 + 6 = 24$

$x_1 = -5 + x_2 - 2x_3 = -5 + 24 - 4 = 15.$

Т.о. фундаментальное решение имеет вид

$(15;\ 24;\ 2;\ 1).$

Проверка:

$15 - 24 + 2\cdot 2 + 5\cdot 1 = -9 + 4 + 5 = 0$

$3\cdot 15 - 2\cdot 24 + 3\cdot 2 - 3\cdot 1 = 45 - 48 + 6 - 3 = -3 + 3 = 0$

$3\cdot 15 - 2\cdot 24 + 2 + 1 = 45 - 48 + 2 + 1 = -3 + 3 = 0$

Ответ: $(15;\ 24;\ 2;\ 1).$