Найти ранг матрицы $C = A \cdot B' + 2E$ если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 0 \\ 2 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 4 \\ -6 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение.

Найдем матрицу B'. $\quad B' = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -6 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Проверим существование произведения $A \cdot B'$ по размерности матриц.

$$\underset{4\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 4}{B'} = \underset{4\times 4}{C}$$ $\Rightarrow$ Произведение существует, т.к. число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B'.

$$A \cdot B' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 0 \\ 2 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & -6 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 7+3(-2) & 1\cdot 1+3\cdot 4 & 1\cdot(-6)+3\cdot 3 & 1\cdot 0+3\cdot 5 \\ -5\cdot 7+0\cdot(-2) & -5\cdot 1+0\cdot 4 & -5\cdot(-6)+0\cdot 3 & -5\cdot 0+0\cdot 5 \\ 2\cdot 7+(-4)(-2) & 2\cdot 1+(-4)\cdot 4 & 2\cdot(-6)+(-4)\cdot 3 & 2\cdot 0+(-4)\cdot 5 \\ -3\cdot 7+(-1)\cdot(-2) & -3\cdot 1+(-1)\cdot 4 & -3\cdot(-6)+(-1)\cdot 3 & -3\cdot 0+(-1)\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 13 & 3 & 15 \\ -35 & -5 & 30 & 0 \\ 22 & -14 & -24 & -20 \\ -19 & -7 & 15 & -5 \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B' + 2E = \begin{pmatrix} -2 & 13 & 3 & 15 \\ -35 & -5 & 30 & 0 \\ 22 & -14 & -24 & -20 \\ -19 & -7 & 15 & -5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 3 & 15 \\ -35 & -3 & 30 & 0 \\ 22 & -14 & -22 & -20 \\ -19 & -7 & 15 & -3 \end{pmatrix}$$

$4 \mapsto \div 2$
$1\text{I} \circlearrowright 4\text{I}$

Найдем ранг матрицы C.

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 13 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 30 & -35 \\ -10 & -7 & -11 & 11 \\ -3 & -7 & 15 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -10 & -7 & -11 & 11 \\ 0 & -3 & 30 & -35 \\ 0 & -22 & 48 & -95 \\ -3 & -7 & 15 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 14 & -56 & 68 \\ 0 & -3 & 30 & -35 \\ 0 & -22 & 48 & -95 \\ -3 & -7 & 15 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 14 & -56 & 68 \\ 0 & -3 & 30 & -35 \\ 0 & -22 & 48 & -95 \\ 0 & -49 & 183 & -223 \end{pmatrix} \sim$$

$1\mapsto \circlearrowright 3\mapsto$; $1\mapsto + 4\mapsto * 5$ | $1\mapsto - 4\mapsto * 3$ | $4\mapsto - 1\mapsto * 3$ | $4\mapsto - 2\mapsto * 16$; $4\mapsto \circlearrowright 2\mapsto$

$$\begin{pmatrix} -1 & 14 & -56 & 68 \\ 0 & -1 & -297 & 337 \\ 0 & -22 & 48 & -95 \\ 0 & -3 & 30 & -35 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 14 & -56 & 68 \\ 0 & -1 & -297 & 337 \\ 0 & 0 & 6582 & -7509 \\ 0 & 0 & 921 & -1046 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 14 & -56 & 68 \\ 0 & -1 & -297 & 337 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7509}{6582} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{31017}{6582} \end{pmatrix}$$

$3\mapsto - 2\mapsto * 22$; $4\mapsto - 2\mapsto * 3$ | $3\mapsto \div 6582$; $4\mapsto - 3\mapsto * 921$

$\Rightarrow r(C) = 4$, т.к. на главной диагонали матр. C находится четыре числа отличных от нуля.

Ответ: 4.

Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = A \cdot B'$ и выяснить, имеет ли она обратную.

Решение.

$$C = A \cdot B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+1\cdot 0+2\cdot 2 & 1\cdot 5+1\cdot 1+2\cdot 3 \\ 0\cdot(-1)+3\cdot 0+(-4)\cdot 2 & 0\cdot 5+3\cdot 1+(-4)\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица C^{-1} существует если матрица C невырожденная, т.е. выполняется требование $|C| \neq 0$.

Найдем определитель матрицы C.

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ -8 & -9 \end{vmatrix} = 3\cdot(-9) - (-8)\cdot 12 = -27 + 96 = 69$$

$|C| \neq 0 \Rightarrow$ матрица C имеет обратную матрицу.

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$

Являются ли строки матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ линейно независимыми.

Решение.

Строки матрицы A будут линейно независимыми если $r(A)$ будет равен числу строк матрицы A, (теорема о ранге матрицы).

Найдем ранг матрицы A, для этого с помощью элементарных преобразований приведем матрицу A к ступенчатому виду.

$$A = \underset{3\text{ст} - 1\text{ст} * 2}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}} \sim \underset{3\text{ст} - 2\text{ст} * 2}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

Ранг матрицы A, $r(A)=2$, показывает, число линейно независимых строк матрицы A. Следовательно в матрице A две строки линейно независимы.

Ответ: Строки матрицы A не являются линейно независимыми.