Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

Решением уравнения $A \cdot X \cdot B = C$ является матрица $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

Найдем обратную матрицу A^{-1} по алгоритму:

1. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1.$

2. $A' = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

3. Находим алгебраические дополнения A_{ij} элементов A'.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 8 = 8.$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3.$

$A_{21} = (-1)^3 5 = -5.$ $\quad A_{22} = (-1)^4 \cdot 2 = 2.$

4. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$

Найдем обратную матрицу B^{-1} по алгоритму:

1. $|B| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 5 + 168 - 6 - 175 - 36 = 1.$

2. $B' = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

3. Находим алгебраические дополнения B_{ij} элементов матрицы B'

$B_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -26$ $\quad B_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -31$ $\quad B_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 27$

$B_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 33$ $\quad B_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 39$ $\quad B_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -34$

$B_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -1 \qquad B_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \qquad B_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

4. $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -26 & -31 & 27 \\ 33 & 39 & -34 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Найдем матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -26 & -31 & 27 \\ 33 & 39 & -34 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -3 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -26 & -31 & 27 \\ 33 & 39 & -34 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -40 & -50 & 43 \\ 29 & 36 & -31 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$A \cdot X \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -40 & -50 & 43 \\ 29 & 36 & -31 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -7 \\ 32 & 38 & -33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -40 & -50 & 43 \\ 29 & 36 & -31 \end{pmatrix}$.