Решить дифференциальное уравнение:

$2xy' + y^2 = 1$

Решение. Выразим y', получаем

$y' = (1-y^2)\cdot\frac{1}{2x}$ $\Rightarrow$ уравнение явл. уравнением с разделяющимися переменными, т.к. ф-я $f(x;y) = (1-y^2)\cdot\frac{1}{2x}$ состоит из 2-х множителей зависящих только от x и y.

Разделим переменные в уравнении.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y^2}{2x} \; ; \; / * dx$$

$$dy = \frac{1-y^2}{2x}dx \; / \div (1-y^2)$$

$$\frac{dy}{1-y^2} = \frac{dx}{2x}$$

Проинтегрируем полученное уравнение, получаем

$$-\int\frac{dy}{y^2-1} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} + C$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{2}\ln|x| + C \quad / * 2$$

$$-\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \ln|x| + C$$

$$\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = \ln|x| + \ln C$$

$$\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = \ln|cx|$$

$$\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = |c\cdot x|$$

Ответ: $\frac{y+1}{y-1} = \pm c\cdot x$

Решить уравнение

$xyy' = 1 - x^2$

Решение. Выразим y', получаем

$$y' = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{y}$$

Получили ур-е с разделяющимися переменными, т.к. ф-я $f(x;y) = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{y}$ состоит из 2-х множителей зависящих только от x и y.

Разделим переменные.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{y} \quad / \cdot dx$$

$$dy = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot dx \quad / \cdot y$$

$$y\,dy = \frac{1-x^2}{x}\,dx$$

Проинтегрируем полученое уравнение, получаем

$$\int y\,dy = \int \frac{1-x^2}{x}\,dx + C$$

$$\frac{y^2}{2} = \int \frac{dx}{x} - \int x\,dx + C$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C \quad / \cdot 2$$

$$y^2 + x^2 = 2\ln|x| + C.$$

Ответ: $x^2 + y^2 = 2\ln|x| + C$