

Экспериментальные данные о значениях переменных  $x$  и  $y$  приведены в таблице:

$x_i$	4	6	8	10	12	14
$y_i$	1,5	1,9	2,0	2,2	2,2	2,3

В результате их выравнивания получена функция  $y = \sqrt[3]{x}$ . Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью  $y = ax + b$  (найти параметры  $a$  и  $b$ ). Выяснить, какая из двух линий лучше выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

Решение.

Для составления нормальной системы уравнений заполним вспомогательную таблицу. (Во всех промежуточных вычислениях числа необходимо записывать с точностью до 4 десятичных знаков).

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2$	$(0,07x_i + 1,36 - y_i)^2$	$(\sqrt[3]{x_i} - y_i)^2$
1	4	1,5	6	16	0,0196	0,0076
2	6	1,9	11,4	36	0,0144	0,0069
3	8	2,0	16	64	0,0064	0
4	10	2,2	22	100	0,0196	0,0021
5	12	2,2	26,4	144	0	0,0080
6	14	2,3	32,2	196	0,0016	0,0121
$\Sigma$	54	12,1	114	556	0,0616	0,0367

Подставим итоговые значения в систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^6 x_i^2) a + (\sum_{i=1}^6 x_i) b = \sum_{i=1}^6 x_i y_i, \\ (\sum_{i=1}^6 x_i) a + 6 \cdot b = \sum_{i=1}^6 y_i. \end{cases}$$

Получаем 
$$\begin{cases} 556a + 54b = 114, \\ 54a + 6b = 12,1. \end{cases}$$

Решим систему методом исключения. Второе уравнение умножим на 9.

$$\begin{array}{r} 556a + 54b = 114 \\ - 486a + 54b = 108,9 \\ \hline \end{array}$$

$$70a = 5,1$$

$$a = \frac{5,1}{70} \approx 0,0728$$

Определяем параметр  $b$ .

$$6b = 12,1 - 54a, \quad b = \frac{1}{6}(12,1 - 54a),$$

$$b = \frac{1}{6}(12,1 - 54 \cdot 0,0728) = \frac{1}{6} \cdot 8,1668 = 1,3615$$

Т.о. эмпирическая формула имеет вид:

$$y = 0,0728x + 1,3615$$

или

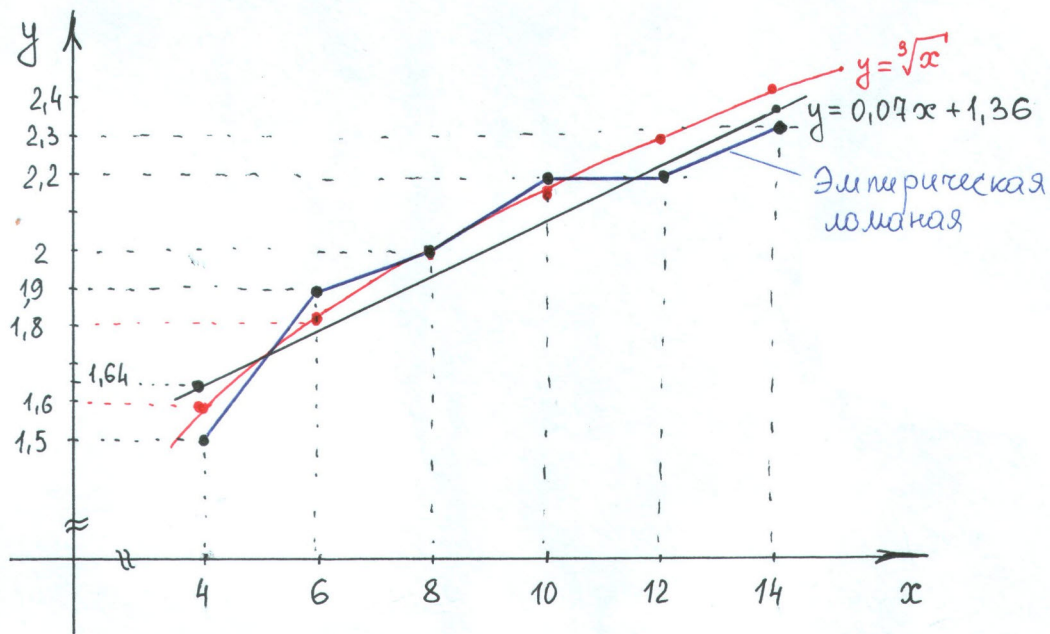
$$y = 0,07x + 1,36.$$

Для выяснения, какая из двух линий лучше выравнивает экспериментальные данные

Для выяснения, какая из двух линий ( $f(x) = 0,07x + 1,36$  или  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ) лучше выравнивает экспериментальные данные определим сумму вида  $S = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$ . Наименьшее значение полученной суммы укажет на наилучшую линию. Заполним последние два столбца во вспомогательной таблице.

Поскольку  $S_{\text{упр}} < S_{\text{мин}}$  ( $0,0367 < 0,0616$ ), то иррациональная зависимость предпочтительнее, т.е.,  $y = \sqrt[3]{x}$  лучше выравнивает экспериментальные данные.

Сделаем чертёж.



Ответ:  $a = 0,07$ ,  $b = 1,36$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$ .