З А Д А Ч И

для самостоятельного решения

1. Прямые и плоскости

1. *Прямые на плоскости*

1.1. Найдите точку пересечения прямых:

а) $3x-4y=7$, $7x-12y=11$.

б) $2x+7y+15=0$, $4x+17y+33=0$.

1.2. Составьте общее уравнение прямой, отсекающей на оси абсцисс отрезок длины 7, а на оси ординат отрезок длины 3.

1.3. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $M(4;7)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок в два раза более длинный, чем на оси ординат.

1.4. Для прямой l, заданной общим уравнением $Ax+By+C=0$ $\left(A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0\right)$, найдите ее:

а) каноническое уравнение; **б)** уравнение в отрезках;

в) уравнение с угловым коэффициентом.

1.5. Найдите угол между прямыми, заданными своими уравнениями $3x+2y-17=0$ и $5x-y-23=0$.

1.6. Определите угол, который образует прямая $3x+3y-11=0$ с положительным направлением оси абсцисс.

1.7. Напишите общее уравнение прямой, проходящей через точки $A\left(3;\ 5\right)$ и $B\left(5;\ -1\right)$.

1.8. Для данной прямой $y=kx+b$ найдите:

а) направляющий вектор;

б) вектор нормали;

в) уравнение прямой, проходящей через начало координат, и перпендикулярной данной прямой.

1.9. Составьте общее уравнение прямой, которая отсекает на положительном направлении оси ординат отрезок длины 4 образует с положительным направлением оси абсцисс угол $\frac{2\pi}{3}$.

1.10. Определите площадь треугольника, образованного прямой $4x+3y-48=0$.

1.11. Найдите каноническое уравнение прямой, содержащей высоту треугольника ABC, проведенную из вершины A, если $A(5;\ 3)$, $B(0;-6)$ $C(2;4)$.

1.12. Найдите каноническое уравнение прямой, относительно которой симметричны точки $A(4;3)$ и $B(6;15)$

1.13. Найдите точку A', симметричную точке $A(1;3)$ относительно прямой $x+2y-20=0$.

2. Прямые и плоскости в трехмерном пространстве

1.14. Даны точки $A(2;3;1)$ и $B(-1;5;7)$. Составьте:

а) параметрические уравнения прямой с начальной точкой A и направляющим вектором $\overrightarrow{AB}$;

б) канонические уравнения прямой AB.

1.15. Даны точки $A(3;5;2)$, $B(-2;3;5)$ $C(-3;4;3)$ Найдите:

а) параметрическое уравнение плоскости П, содержащей данные точки;

б) общее уравнение плоскости П;

в) канонические уравнения прямой AB;

г) косинус угла BAC.

1.16. Точка $P(3;4;3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из точки $A(5;4;-2)$ на плоскость. Составьте уравнение этой плоскости.

1.17. При каких значениях параметра m прямая $l:\frac{x+2}{m}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости П : $x+3y-5z+23=0$?

1.18. При каких значениях параметра m прямая $l:\frac{x+2}{m}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости

$\Pi\ :\ mx+4y-2mz+15=0$?

1.19. Напишите канонические уравнения прямой l, которая проходит через точку $A(2;5;-1)$ и перпендикулярна плоскости $\Pi\ :\ 4x+y-5z+15=0$

1.18. Найдите точку пересечения P перпендикуляра, опущенного из точки $M(2;-1;6)$ на плоскость $\Pi\ :\ 4x-3y+z+11=0$.

1.19. Найдите проекцию P точки $M(11;4;4)$ на прямую $l:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+11}{2}=\dfrac{z-2}{-4}$.

1.20. Найдите расстояние от точки $M(4;-6;-4)$ до прямой $l:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-7}{4}$.

1.21. Составьте общее уравнение плоскости Π, которая содержит точки $A(2;0;-1)$, $B(1;-1;3)$ и перпендикулярна плоскости $3x+2y-z+5=0$.

1.22. Найдите общее уравнение плоскости Π, все точки которой равноудалены от точек $A(-4;1;5)$ и $B(1;4;2)$

1.23. Найдите точку A' симметричную точке $A(-38;5;-2)$ относительно прямой $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-5}{3}$.

3. *Прямые и плоскости в четырехмерном пространстве*

1.24. Пусть $A,B,C\in\mathrm{R}^4$. Покажите, что проекция P точки A на прямую BC представима в виде $P=B+t\overrightarrow{BC}$, где число t удовлетворяет равенству $t\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$.

1.25. Найдите расстояние от точки $A(-19;5;5;3)$ до прямой, содержащей точки $B(1;3;5;7)$ и $C(0;2;3;4)$.

1.26. Найдите начальную точку A и направляющие векторы $\vec{p}_1,\vec{p}_2$ для плоскости заданной системой уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 22, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$$

1.27. Найдите проекцию P точки $M(-3;1;2;10)$ на двумерную плоскость, содержащую точки $A(1;1;0;0)$, $B(2;2;1;1)$, $C(0;0;1;1)$.

1.28. Найдите проекцию P точки $M(-2;1;-1;4)$ на гиперплоскость, содержащую точки $A(-2;-1;0;1)$, $B(-2;3;0;5)$, $C(1;-1;2;1)$, $D(-2;0;1;1)$.

4. *Приложения в экономике и финансах*

1.29. Спрос и предложение на некоторый товар задаются функциями, $p = 0,5q + 10$, $p = -0,25q + 40$.

а) Найдите точку рыночного равновесия.

б) Найдите новую точку рыночного равновесия при введении налога, равного 6 на единицу продукции.

в) Найдите точку рыночного равновесия при предоставлении государством субсидии, равной 3 на единицу продукции.

1.30. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид: $p = 4q + 10$, $p = -q + 90$.

а) Найдите точку рыночного равновесия.

б) Какой налог на единицу продукции приведет к снижению равновесного объема продаж на 2 единицы?

в) Какой налог на единицу продукции приведет к снижению равновесного объема продаж до 15 единиц?

1.31. Функции предложения и спроса на некоторый товар имеют вид: $p = -3q + 150$, $p = 5q + 20$.

а) Какая субсидия на единицу продукции приведет к увеличению равновесного объема продаж на 3 единицы?

б) Какой субсидия на единицу продукции приведет к увеличению равновесного объема продаж до 25 единиц?

1.32. Прибор был куплен за 30 тыс. руб. По нормам его остаточная стоимость равна нулю, а срок службы составляет 15 лет. Укажите уравнение, определяющее стоимость прибора в зависи-

мости от времени *t,* построить график. Найдите стоимость станка через 10 лет и 6 месяцев его эксплуатации.

1.33. Газовая плита была куплена за 12 000 руб. Амортизация начисляется линейно и составляет 800 рублей в год. Найдите

а) функцию стоимости газовой плиты через t лет;

б) срок службы плиты;

в) стоимость газовой плиты через 7 лет и 3 месяца после начала эксплуатации.

1.34. Постоянные издержки при производстве фильтров для воды составляют 48 тыс. руб. в месяц, а переменные – 200 руб. за один фильтр. Цена одного фильтра 700 руб. Написать функции дохода и издержек. Построить графики. Найти точку безубыточности.

2. Линии второго порядка на плоскости

1. *Задачи на основные понятия*

2.1. Найдите уравнение окружности, симметричной с окружностью $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ относительно прямой $x-y-3=0$.

2.2. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(7;7)$ и $B(-2;4)$, если ее центр лежит на прямой $2x-y-2=0$.

2.3. Для кривой γ укажите, если возможно: **а)** название; **б)** значения полуосей; **в)** фокальное расстояние; **г)** эксцентриситет; **д)** уравнения директрис; **е)** уравнения асимптот.

1) $\gamma\ :\ x^2+2y^2=4$; 2) $\gamma\ :\ 2x^2-3y^2=6$;

3) $\gamma\ :\ y^2=12x$; 4) $\gamma\ :\ x^2+y^2=9$.

2.4. Составьте каноническое уравнение эллипса, если известны фокальное расстояние $|F_1F_2|=10$ и эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{5}{13}$.

2.5. Составьте каноническое уравнение эллипса, если его малая полуось равна $\sqrt{5}$, а эксцентриситет равен $\varepsilon=\dfrac{2}{3}$.

2.6. Пусть эллипс γ имеет фокусы $F_1(-c;0)$, $F(c;0)$, где $c>0$, и эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{3}{5}$. Зная, что $M(5;4)\in\gamma$, найдите:

а) сумму расстояний $|F_1M|+|FM|$ от точки M до фокусов эллипса;

б) уравнение прямой, содержащей фокальный радиус FM точки M.

2.7. Пусть гипербола имеет фокусы $F_1(-c;0)$, $F(c;0)$ где $c>0$, и эксцентриситет $\varepsilon=2$. Найдите каноническое уравнение гиперболы и уравнения ее асимптот, если известно, что точка $M\left(\sqrt{6};\sqrt{2}\right)$ принадлежит гиперболе.

2.8. Найдите эксцентриситет эллипса, если фокальный отрезок виден из верхней вершины под углом $\frac{2\pi}{3}$.

2.9. Составьте уравнение множества точек на плоскости, расстояние от которых до прямой $x-4=0$ в два раза больше, чем до точки $F(1;0)$. Приведите уравнение к каноническому виду и укажите название линии.

2.10. Составьте уравнение эллипса, если он имеет те же фокусы, что и гипербола $x^2-y^2=2$ и проходит через точку $N(-2;3)$.

2.11. На левой ветви гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ найдите точки, правый фокальный радиус которых равен 14.

2.12. Составьте уравнение гиперболы, фокусы которой совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$, а эксцентриситет равен 2.

2.13. Какое уравнение имеет кривая γ в новой системе координат $\left\{O(0,0),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\right\}$

а) $x^2-y^2=4$; **б)** $x^2+y^2=4$; **в)** $y^2=\frac{x}{\sqrt{2}}$.

2.14. Укажите каноническое уравнение кривой γ и преобразование, приводящее к каноническому уравнению:

а) $\gamma\ :\ y^2+8y-9=0$; **б)** $\gamma\ :\ x^2-16=0$;

в) $\gamma : x^2 - 4y^2 - 16 = 0$ **г)** $\gamma : x^2 + 9y^2 - 81 = 0$;

д) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4 = 0$; е) $\gamma : 2xy + 1 = 0$;

ж) $\gamma : x^2 + 6xy + 9y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$.

2.15. Докажите, что сумма расстояний от любой точки гиперболы до ее асимптот есть величина постоянная и равная $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

2. Приложения в экономике и финансах

2.16. Спрос и предложение на некоторый товар задаются функциями $p = q - 5$, $p = \frac{18}{q} + 2$. Постройте графики и найдите точку рыночного равновесия.

2.17. Издержки производства x единиц продукции определяются функцией $C(x) = 0,2x^2 + 2x + 240$. Цена одной единицы продукции равна 18. Напишите функцию прибыли предприятия найдите точку безубыточности.

2.18. Пусть Андрей, Катя и Николай имеют по 240 денежных единиц на закупку фруктов. Известно, что 1 кг груш стоит 30 денежных единиц, а 1 кг яблок стоит 20 денежных единиц. Покупается x_1 кг груш и x_2 кг яблок. Функции полезности, определяющие уровень покупки, следующие: $u_A = 4x_1 + x_2$ для Андрея, $u_K = x_1^2 + 4x_2$ для Кати и $u_N = x_1 \cdot x_2$ для Николая. Определите, какую покупку сделает каждый из них, чтобы обеспечить максимум своей функции полезности.

2.19. Андрей и Борис собираются купить кофе и чай. Покупается x_1 г кофе и x_2 г чая. Каждый из них имеет свою функцию полезности, которая показывает, насколько полезной он считает свою покупку. Эти функции полезности следующие: $u_A = 2x_1 + x_2$ для Андрея, $u_B = x_1^2 + 4x_2^2$ для Бориса.

а) Постройте линии уровня функции полезности для значений уровня h = 1, 2. Укажите названия этих линий.

б) Для каждого расположите в порядке предпочтения покупки $\vec{r} = (400,100)$, $\vec{s} = (300,400)$, $\vec{t} = (100,200)$.

2.20. Пусть Андрей и Борис имеют по 240 денежных единиц на закупку чая и кофе. Известно, что 100 г кофе стоит 40 денежных единиц, а 100 г чая стоит 30 денежных единиц. Покупается x_1 г кофе и x_2 г чая. Функции полезности, определяющие уровень покупки, те же, что указаны в задаче 2.18.

а) Может ли Андрей позволить себе купить 400 г кофе и 300 г чая?

б) 500 г кофе и 100 г чая?

в) Определите, какую покупку сделает каждый из них, чтобы обеспечить максимум своей функции полезности.

2.21. Пусть фирма производит оборудование двух видов А и В в количестве x и y единиц продукции, соответственно. При этом доходы фирмы за год выражаются функцией доходов $R(x, y) = 4x + 6y$, а издержки на производство выражаются функцией издержек $C(x, y) = 48 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{12}y^2$. Определить, какие кривые задаются линиями уровня функции прибыли. Указать значения параметров и сделать эскиз линии уровня при $h = 105$.

2.22. Пусть фирма производит оборудование двух видов А и В в количестве x и y единиц продукции, соответственно. При этом функция доходов и функция издержек те же, что в задаче 2.20. Определить план производства (x, y), при котором фирма получает максимум прибыли.

2.23. Пусть фирма производит товары двух видов А и В в количестве x и y единиц продукции, соответственно. При этом доходы фирмы за год выражаются функцией доходов $R(x, y) = 8x + 6y$, а издержки на производство выражаются функцией издержек $C(x, y) = 16 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{16}y^2$. Определить, какие кривые задаются линиями уровня функции прибыли. Написать их канонические уравнения. Указать значения параметров и сделать эскиз линии уровня при $h = 48$.

2.24. Пусть фирма производит оборудование двух видов А и В в количестве x и y единиц продукции, соответственно. При этом функция доходов и функция издержек те же, что в задаче 2.22. Определить план производства (x, y), при котором фирма получает максимум прибыли.

3. Метод наименьших квадратов и приближенное решение систем линейных уравнений в экономических задачах

3.1. Найдите наилучшее приближенное решение несовместной СЛУ с помощью метода наименьших квадратов (МНК)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x + 4y = 10, \\ 5x + 2y = 8. \end{cases}$$

В ответе с точностью до 0,001 укажите решение, вектор невязки δ, и длину вектора невязки.

3.2. Найдите наилучшее приближенное решение несовместной СЛУ с помощью метода наименьших квадратов (МНК)

$$\begin{cases} 3x+3y=7, \\ 5x+6y=12, \\ 2x+5y=8, \\ 4x+7y=13. \end{cases}$$

В ответе укажите решение с точностью до 0,01, вектор невязки δ, и длину вектора невязки.

3.3. Пусть x – цена на товар (усл.е.) и y – объем продаж товара.

x_i	3	4	5	6	7
y_i	200	160	120	90	80

Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость $y=\alpha+\beta x$, найдите эту зависимость с помощью МНК.

3.4. Покажите, что определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^k \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^k \end{pmatrix}$$

в случае k = 2, 3, 4 отличен от нуля, если все точки $x_1,\dots,x_n$ различны. Таким образом, задача сглаживания экспериментальной зависимости в виде многочлена степени 2, 3, 4 имеет единственное решение.

3.5. По экспериментальным данным с помощью МНК постройте линейную зависимость $y=\alpha+\beta x$. Сравнить эту зависимость с зависимостью $y = 2x + 0{,}1x^2$, сопоставляя их ошибки $S_{лин}$ и $S_{кв}$.

x_i	2	2,5	3	3,5	4
y_i	4,2	5,5	6,9	8	9,5

3.6. По экспериментальным данным с помощью МНК постройте линейную зависимость $y=\alpha+\beta x$. Сравните эту зависимость с зависимостью $y=\sqrt{x}$ сопоставляя их ошибки $S_{лин}$ и $S_{кв}$.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,0	1,4	1,8	2,1	2,3

3.7. Имеются следующие данные о расходах на рекламу на производство продукции (в условных единицах) и объемах продаж (в тыс. единиц)

x_i	10	20	30	40	50
y_i	14	25	36	51	80

Найдите квадратичную зависимость вида $y = \beta x + \gamma x^2$ с помощью МНК.

3.8. Для данных задачи из 3.7 найдите квадратичную зависимость $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ с помощью МНК.

3.9. Пусть $\vec{b} = (2,2,1)^t$ и $\delta\vec{b} = (0{,}1; 0{,}1; 0{,}05)^t$. Найдите число обусловленности симметрической матрицы A и оцените относительную погрешность решения системы $A(x + \delta x) = b + \delta b$, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, **б)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 19 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3.10. Пусть $\vec{b} = (2,2,3)^t$ и $\delta\vec{b} = (0{,}1; 0{,}1; 0{,}15)^t$. Найдите число обусловленности матрицы A и оцените относительную погрешность решения системы $A(x + \delta x) = b + \delta b$, если

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, **б)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.11. Оцените относительную погрешность решения системы $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \delta A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

3.12. Дан динамический ряд, характеризующий месячную динамику численности сотрудников, занятых в сфере услуг некоторой фирмы

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	34	36	39	44	52	55	59	65	67	73

а) в предположении о линейной зависимости найдите коэффициенты зависимости $y = \alpha + \beta t$ и рассчитать точечный прогноз на 11-ый месяц;

б) в предположении о квадратичной зависимости найдите коэффициенты зависимости $y = \alpha + \beta t + \gamma t^2$ и рассчитать точечный прогноз на 11-ый месяц.

3.13. По данным таблицы зависимости ежемесячной инфляции по времени, отсчитывая от начала года

t_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_k	1,2	1,7	2,0	2,4	2,6	2,8	3,1	3,4	3,7	4,2

оцените параметры α и β линейной зависимости $y = \alpha + \beta t$ инфляции от времени и сделайте прогноз на 11-ый месяц.

4. Выпуклые множества

4.1. Какие из следующих множеств являются выпуклыми:

а) $M_1 = \{(x_1;\ x_2) \mid 2x_1 + 3x_2 \geq 4\}$;

б) $M_2 = \{(x_1; x_2) \mid |x_1| + |x_2| \geq 1\}$;

в) $M_3 = \{(x_1; x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \geq 4\}$;

г) $M_4 = \{(x_1; x_2) \mid |x_1| + |x_2| \leq 1\}$;

д) $M_5 = \{(x_1; x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$.

Ответ обоснуйте.

4.2. Если A и B различные точки точечного пространства T^n, то для любых чисел m и n точка $P = \frac{m}{m+n}A + \frac{n}{m+n}B$ есть выпуклая линейная комбинация точек A и B. В каком отношении точка P делит отрезок AB?

4.3. Для произвольного треугольника ABC показать, что выпуклая линейная комбинация вершин $P = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ является точкой пересечения его медиан.

4.4. Дайте определение выпуклого множества. Докажите, что пересечение $M_1 \cap M_2$ выпуклых множеств M_1 и M_2 является выпуклым множеством.

4.5. Приведите пример выпуклых множеств M_1 и M_2 таких, что их объединение $M_1 \cup M_2$ не является выпуклым множеством.

4.6. Установите, принадлежит ли точка P отрезку AB, если

а) $P=(7;19)$, $A=(3;7)$, $B=(12;36)$;

б) $P=(1;13;0)$, $A=(-1;7;5)$, $B=(5;25;-4)$;

в) $P=(-3;1;6)$, $A=(-5;0;9)$, $B=(3;4;-3)$.

4.7. Установите, принадлежит ли точка P выпуклой линейной оболочке $\operatorname{conv}\{A,B,C\}$ точек A, B, C, если $P=(3;7)$., $A=(-1;7)$, $B=(5;25)$, $C=(14;15)$.

4.8. Имеются три сплава A, B, C. Сплав A содержит 70% золота и 10% серебра, B – 60% золота и 20% серебра, C – 20% золота и 30% серебра. В какой пропорции необходимо взять сплавы A, B, C, чтобы произвести изделие, содержащее 50% золота и 20% серебра?

4.9. Предприятие, применяя четыре технологии, производит товары X и Y. При этом в каждый момент времени в производственном процесс используется только одна технология, и каждая технология позволяет производить одновременно товары двух видов. Количество единиц продукции, производимых за час работы по определенной технологии, указано в таблице

технология	X	Y
1	2	6
2	4	9
3	8	8
4	9	6

Работая по каким трем из четырех технологий, предприятие может произвести за 1000 часов 5000 ед. товара X и 8000 ед. товара Y?

4.10. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество решений системы неравенств, найдите вершины построенных выпуклых многоугольников:

а) $\begin{cases} x+y \ge -2, \\ x-2y \ge -2. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x+2y \le 6, \\ 3x+y \le 9, \\ x+y \ge 3. \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x+2y \le 6, \\ x+y \ge 2, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$

4.11. Используя метод сведения к системе линейных уравнений, найдите вершины множеств, заданных линейными ограничениями:

а) $\begin{cases} 5x+2y\le 10, \\ x+y-z=-2, \\ x\ge 0, y\ge 0. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x\le 4, \\ x+y-z=-3, \\ x\ge 0, y\ge 0. \end{cases}$

4.12. Рассматривая проекцию на плоскость $(O; x_1, x_2)$, найдите вершины множеств, заданных линейными ограничениями:

а) $\begin{cases} 2x_1+5x_2-x_3=10, \\ x_1+4x_2+x_4=8, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5x_1+8x_2+4x_3+x_4=21, \\ 4x_1+7x_2+3x_3+x_4=12, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0. \end{cases}$

4.13. Пусть $X\subset R^3$ – множество всех неотрицательных наборов товаров трех видов, имеющих стоимость не более 100 при ценах $p_1=10,\ p_2=20,\ p_3=25$. Найти вершины X.

4.14. Даны два варианта цен: $\vec{p}=(3;4;5)$ и $\vec{p}\,'=(4;3;6)$. Пусть $X\subset \mathrm{R}^3$ – множество всех неотрицательных наборов товаров $\vec{x}$ трех видов и имеющих стоимость не более 60 при первом и втором вариантах цен. Найти вершины множества X.

4.15. Пусть $X\subset \mathrm{R}^3$ – множество всех неотрицательных наборов товаров $\vec{x}$, имеющих стоимость не более 12 при ценах $\vec{p}=(6;4;3)$ и не более L при ценах $\vec{p}\,'=(1;1;1)$. Найти количество вершин X в зависимости от положительного значения L.

4.16. Нефтеперерабатывающий завод получает нефть из трех районов добычи, имеющих мощности не более, чем 20, 30 и 40 тонн нефти в сутки, соответственно. Пусть x_i – количество нефти, получаемое заводом в течение суток из района $i\,(i=1,2,3)$; $K=x_1+x_2+x_3$ – плановая мощность завода; $X\subset \mathrm{R}^3$ – множество всех векторов $\vec{x}$, определяющих различные варианты поставки нефти. Найти количество вершин X в зависимости от значения $K\in\{15;25;35;45\}$.

4.17. Найдите вершины множеств, заданных линейными ограничениями:

а) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=10, \\ x_1+x_2-x_3+x_4=20, \\ x_1-x_2+x_3+x_4=10, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 17x_1 - 12x_2 - 4x_3 + x_5 = -2, \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 12, \\ 13x_1 - 10x_2 - 3x_3 + x_5 = -4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0. \end{cases}$

4.18. Доходности акций компаний A, B, C, D равны, соответственно, 20%, 40%, 60% и 80%. Множество $\wp_{100,\,50}$ всех неотрицательных портфелей этих акций с начальной стоимостью 100 и доходом 50 задается системой ограничений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100, \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 + 0,6x_3 + 0,8x_4 = 50, \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, ..., 4. \end{cases}$$

Найти вершины множества $\wp_{100,50}$.

4.19. Укажите систему неравенств, определяющую выпуклую оболочку данного набора точек $A_1, A_2, ...$:

а) $A_1(2;1)$, $A_2(-1;4)$, $A_3(4;4)$.

б) $A_1(2;\ 2)$, $A_2(3;3)$, $A_3(2;4)$, $A_4\left(\frac{10}{3};2\right)$, $A_5(8;\ 2)$.

4.20. Фирма выпускает два вида мороженого: сливочное и шоколадное, для изготовления которых используются молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы даны в таблице

Исходный продукт	Расход на 1 кг мороженого		Запас на сутки кг
	Сливочное	Шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	300
Наполнители	0,4	0,8	365

При этом спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг, а спрос на шоколадное не превышает 350 кг в сутки. Если x_1 и x_2 суточные объемы выпуска сливочного и шоколадного мороженного соответственно определить в аналитическом виде:

а) ограничение по молоку;

б) ограничение по наполнителям;

в) рыночные ограничения по спросу.

Постройте графически область ограничений для суточного выпуска продукции. Укажите вершины области ограничений.