З А Д А Ч И

для самостоятельного решения

1.1. Основные понятия, связанные с многочленами

124. Приведите многочлен к стандартному виду, применяя формулы сокращенного умножения:

а) $(3+x)^3+(2-x)^3$; **б)** $(x-3)^3+(1+x)^3$.

125. Укажите стандартный вид многочлена:

а) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$;

б) $(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\ldots(x^{512}+1)$.

126. Найдите коэффициент при x в стандартном виде многочлена:

а) $\left(\left((x-1)^2-1\right)^2-1\right)^2$; **б)** $((\ldots((x-2)^2-2)^2-\ldots)^2-2)^2$.

127. Какой коэффициент при x^2 имеет многочлен:

а) $(x+1)^4(x^2-x+1)^5$; **б)** $\left(x+\left(x+\left(x+\left(x+(x+1)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2$?

128. Сколько делителей

а) нулевой степени;

б) положительной степени имеет многочлен $f=x^3+3x+1$?

129. Доказать, что для произвольных чисел $a_2,\ldots,a_{n-1},b_2,\ldots,b_{m-1}$ можно подобрать числа $c_2,\ldots,c_{n+m-1}$ так, что будет верно равенство:

$$\left(x^n-2x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x-3\right)\left(x^m-3x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}x+2\right)=$$
$$=x^{n+m}-5x^{n+m-1}+c_2x^{n+m-2}+\ldots+c_{n+m-1}x-6.$$

130. Какие из выражений можно представить в виде многочлена от x:

а) $\sqrt{x^2+1}$; **б)** $\dfrac{x^{555}-1}{x-1}$;

в) $\dfrac{x^5+x+1}{x^2+x+1}$; **г)** $\sqrt{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$?

131. Разделите с остатком многочлен f на многочлен g:

а) $f=x^{399}+x^{398}+...+1, \quad g=x^{19}+x^{18}+...+1;$

б) $f=x^{117}-1, \quad g=x^7-1.$

132. Пусть f и g – ненулевые многочлены с целыми коэффициентами. Можно ли утверждать, что частное q и остаток r от деления f на g имеют:

а) рациональные коэффициенты;

б) целые коэффициенты, если старший коэффициент многочлена g равен 1?

133. Может ли многочлен $x^{77}+17x^{75}+...+7$ с целыми коэффициентами делиться на многочлен вида $x^2+2ax+3$ при некотором целом a?

1.2. Схема Горнера и корни многочленов

134. Почему коэффициенты многочлена $\left(x^4+3x+4\right)\left(x^3+9x+11\right)$ не могут удовлетворять равенству: $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7=1$?

135. Докажите, что не существует многочлена f с целыми коэффициентами такого, что

а) $f(-1)=0, f(1)=1;$ **б)** $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=5.$

136. Найдите все рациональные числа, которые являются корнями уравнения при каких-либо целых значениях параметров a и b:

а) $x^4+3x^2+5=7x^3+ax+13;$ **б)** $3x^5+ax^4=5x^3+bx+7.$

137. Докажите иррациональность каждого из чисел:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{5};$ **б)** $\sqrt{3}+\sqrt{5};$ **в)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$

138. Найдите рациональные корни многочлена f:

а) $f=x^4+10x^3+35x^2+51x+26;$

б) $f=x^6-6x^5+11x^4-x^3-18x^2+20x-8.$

139. Докажите, что многочлен f не имеет целых корней:

а) $f = x^7 - 8x^6 + 6x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 16;$

б) $f = x^{46} + 12x^{37} + 41x^{22} + 22x - 40.$

140. Пусть $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n -$ многочлен с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого простое число. Докажите, что всякий рациональный корень f является целым.

141. Для каких натуральных чисел a уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный рациональный корень:

а) $f = 3x^6 + 13x^4 + ax^3 + 7x^2 + 2;$

б) $f = 5x^7 + 7x^5 + ax^3 + 3x^2 + 2.$

142. Докажите дополнительную теорему о рациональных корнях: если рациональное число $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена f с целыми коэффициентами, причем дробь $\frac{p}{q}$ несократима, тогда для любого целого m число $p - mq$ является делителем $f(m)$.

143. Найдите рациональные корни уравнения:

а) $128x^7 - 512x^6 + 576x^6 + 448x^4 - 256x^3 - 7 = 0;$

б) $240x^4 - 308x^3 + 142x^2 - 28x - 103 = 0.$

1.3. Теорема Безу и следствия из нее

144. Разложите многочлен на множители, которые сами на множители уже неразложимы:

а) $x^4 - ax^3 - a^3x + a^4;$ **б)** $x^4 + ax^3 + a^3x + a^4;$

в) $x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4;$ **г)** $x^4 + 2ax^3 + a^3x + 2a^4.$

145. Используя замену $t = ax$, решите уравнение:

а) $8x^3 - 4x + 1 = 0;$ **б)** $4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0;$

в) $27x^3 + 9x^2 - 9x + 1 = 0;$ **г)** $9x^3 + 2x - 1 = 0.$

146. Решите уравнение:

а) $\left(x^2 - x + 1\right)^2 = 3x^2 - x^3 - x^4;$

б) $\left(x^2 + x + 1\right)^2 = 3x^4 + 7x^3 + 5x^2;$

в) $9\left(x^2+1\right)^2=\left(5x^2+x+3\right)\left(x+1\right)^2$;

г) $9\left(x^2+2x-1\right)^2=\left(3x^2+5x-1\right)\left(x-1\right)^2$.

147. Докажите, что для любых целых a,b,c каждое из следующих чисел делится на $a+b+c$:

а) $a^3+b^3+c^3-3abc$;

б) $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^4+b^4+c^4\right)$.

148. Разложите на множители определители ван дер Монда $W(a,b,c)$ и $W(a,b,c,d)$:

а) $W(a,b,c)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;

б) $W(a,b,c,d)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$.

149. Пусть $c_1,...,c_4$ – различные числа, $b_1,b_2,...,b_4$ – произвольные числа. Сколько существует многочленов f степени не выше третьей таких, что $f\left(c_k\right)=b_k\ \left(k=1,...,4\right)$? Ответ обоснуйте.

150. Укажите кубический многочлен f по его четырем значениям:

а) $f\left(-1\right)=3,\ f\left(0\right)=-1,\ f\left(1\right)=-1,\ f\left(2\right)=3$;

б) $f\left(-1\right)=-3,\ f\left(0\right)=1,\ f\left(1\right)=5,\ f\left(2\right)=15$.

151. Пусть $c_1,c_2,...,c_5$ – различные числа, $b_1,b_2,...,b_5$ – произвольные числа. Положим $g_k(x)$ – произведение всех линейных многочленов $x-c_1$, $x-c_2,...,x-c_5$, за исключением $x-c_k$, и $f_k(x)=\dfrac{g_k(x)}{g_k(c_k)}$. Наконец, обозначим через $f\left(x\right)=b_1g_1\left(x\right)+...+$ $+b_5g_5\left(x\right)$ *интерполяционный многочлен Лагранжа*. Проверьте справедливость равенств:

а) $f_k(c_k)=1,\ f_k(c_i)=0\ (i\neq k)$; **б)** $f\left(c_k\right)=b_k\ \left(k=1,...,5\right)$.

152. Найдите стандартный вид интерполяционного многочлена Лагранжа, проходящего через точки:

а) $(-2;16),(1;-2),(3;-4)$;

б) $(1;-2),(2;2),(3;14),(4;40)$;

в) $(-2;0),(-1;1),(0;8),(1;27)$;

г) $(1;-2),(2;2),(3;14),(4;40)$.

153. Укажите отрезок длины 3, содержащий все корни многочлена $f=3x^3-18x^2+33x-17$. Попробуйте найти отрезок длины $\frac{5}{2}$, обладающий указанным свойством.

1.4. НОД многочленов и алгоритм Евклида

154. Докажите, что для любых f,g,h верно: $(fh,gh)=(f,g)\cdot h$.

155. Найдите наибольший общий делитель и его линейное представление для многочленов f,g:

а) $f=x^3-x^2-x-2,\quad g=x^3-2x^2-2x-3$;

б) $f=x^3-1,\quad g=x^4+x^3+2x^2+x+1$.

156. Для каких многочленов f дробь:

а) $\dfrac{f+x}{f^2+2x^2}$; **б)** $\dfrac{f+x}{f^4+x^4}$;

в) $\dfrac{f^2+x^2}{f^3+x^3}$; **г)** $\dfrac{f+2x}{f^2+x^3}$

сократима на некоторый многочлен положительной степени?

157. Пусть $f_n=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1$. Докажите, что

а) f_{15} и f_8 взаимно просты; **б)** $(f_{15},f_{10})=f_5$; **в)** $(f_{48},f_{20})=f_4$.

Как найти (f_n,f_m)?

158. Докажите для многочленов $g_n=x^n-1$ равенства:

а) $(g_{13},g_7)=g_1$; **б)** $(g_{15},g_6)=g_3$; **в)** $(g_{396},g_{164})=g_4$.

Как найти (g_n,g_m)?

159. **а)** Пусть хотя бы один из взаимно простых многочленов f,g имеет положительную степень. Докажите, что существуют

единственные многочлены u, v такие, что $fu + gv = 1$ и $\deg u < \deg g, \deg v < \deg f$.

б) Сформулируйте аналогичный результат для произвольных многочленов f, g.

1.5. Комплексные числа

160. Упростите выражение:

а) $(a+bi)+(a-bi)$; **б)** $(a+bi)(a-bi)$;

в) $(a+bi)^2-(a-bi)^2$.

161. Вычислите определитель:

а) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$.

162. Найдите значение определителя, если $w = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$:

а) $\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w^2 & 1 & w \\ w & w^2 & 1 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & w \\ 1 & 1 & w^2 \\ w^2 & w & 1 \end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w \\ 1 & w & w^2 \end{vmatrix}$.

163. Для действительных чисел a, b решите уравнение:

а) $z + 2\overline{z} = 3a + bi$; **б)** $2z - 3\overline{z} = a + 5bi$.

164. Докажите, что операция сопряжения обладает следующими свойствами:

а) $\overline{z+t} = \overline{z} + \overline{t}$; **б)** $\overline{z-t} = \overline{z} - \overline{t}$;

в) $\overline{z \cdot t} = \overline{z} \cdot \overline{t}$; **г)** $\overline{\left(\frac{z}{t}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{t}}$.

165. Используя комплексные числа, докажите тождество Эйлера для действительных чисел a, b, c, d:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.$$

166. Упростите выражения, содержащие действительные числа a, b:

а) $\frac{a+bi}{a-bi} + \frac{a-bi}{a+bi}$; **б)** $\frac{a+bi}{a-bi} - \frac{a-bi}{a+bi}$.

167. Решите систему линейных уравнений в комплексных числах:

а) $\begin{cases} (3-i)z+(4+2i)t=1+3i, \\ (4+2i)z-(2+3i)t=7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (2+i)z+(3-i)t=2+6i, \\ (1+2i)z-(3-2i)t=-3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (2-i)z+(3-i)t=5+4i, \\ (1+2i)z+it=-3+2i; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (1-i)z+(2-3i)t=6-4i, \\ (3+2i)z+(2+i)t=9+4i. \end{cases}$

168. Вычислите модуль и аргумент комплексного числа:

а) $\left(2+\sqrt{3}\right)+i$; **б)** $(1+\cos\alpha)+i\sin\alpha$, если $-\pi<\alpha<\pi$.

169. Какой геометрический объект описывают указанные соотношения:

а) $\mathrm{Re}(z)=3$; **б)** $1\le \mathrm{Im}(z)\le 2$; **в)** $|z|=1$; **г)** $\arg z=\dfrac{\pi}{6}$.

170. Изобразите на плоскости множество точек z таких, что

а) $|z-i|=1$; **б)** $|z-i|\le 1$; **в)** $|z-i|<1$; **г)** $|z-i|>1$.

171. Найдите тригонометрическую форму комплексного числа:

а) $\left(1-i\sqrt{3}\right)(\cos\varphi-i\sin\varphi)$; **б)** $\dfrac{i-1}{\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}}$;

в) $\left(1+i\sqrt{3}\right)(\cos\varphi+i\sin\varphi)(1+i)$; **г)** $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\sqrt{2}(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$.

172. Используя формулу Муавра, докажите формулы понижения степени:

а) $2\sin^2 x=1-\cos 2x$; **б)** $2\cos^2 x=1+\cos 2x$;

в) $4\sin^3 x=3\sin x-\sin 3x$; **г)** $4\cos^3 x=3\cos x+\cos 3x$.

173. Вычислите сумму и произведение комплексных корней уравнения:

а) $z^5-1=0$; **б)** $z^5-5z+5=0$.

174. Пусть n – натуральное число, $n > 3$. Найдите ненулевые корни уравнения:

а) $z^n = \overline{z}$; **б)** $z^n = 2^{n-2}\overline{z}^2$; **в)** $z^n = 3^{n-3}\overline{z}^3$.

1.6. Многочлены и дроби над R и C

175. Можно ли утверждать, что любое целое алгебраическое уравнение степени 5 с действительными коэффициентами, в частности уравнение Абеля $x^5 - 5x + 5 = 0$, имеет действительный корень? Ответ обоснуйте.

176. Пусть многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $w = a + bi, b \neq 0$. Докажите, что многочлен $f(x)$ делится на квадратный трехчлен $x^2 - 2ax + \left(a^2 + b^2\right)$.

177. Докажите, что комплексно сопряженные корни многочлена с действительными коэффициентами имеют одинаковые кратности.

178. Разложите многочлен $f(z)$ на линейные множители над **C**:

а) $f(z) = z^4 + 5z^2 + 4$; **б)** $f(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1$.

179. Какие из следующих утверждений верны. Ответ обоснуйте.

а) $x^{34} + 2x^{32} - 3x^{30} + 4x^4 + x^2 - 5$ делится на $x^2 - 1$;

б) $x^{2008} - 1$ делится на $x^4 - 1$;

в) $x^{2007} - 1$ кратно $x^2 + x + 1$;

г) $x^{4014} - 2x^{2007} + 1$ кратно $\left(x^2 + x + 1\right)^2$.

180. Сколько делителей вида $x - a, a \in \mathrm{R}$, имеет многочлен f:

а) $f = x^3 - 3x^2 + 2x$; **б)** $f = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$;

в) $f = x^3 + 3x + 1$; **г)** $f = x^3 - 3x + 1$?

181. Найдите квадратные трехчлены $x^2 + px + q$ с действительными коэффициентами p, q, на которые делится многочлен f:

а) $f = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$; **б)** $f = 2x^3 + 5x^2 + 5x + 3$,

в) $f = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3$, **г)** $f = x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 6x + 4$.

182. Найдите многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 1, корнями которого являются:

а) все корни степени ≤ 3 из единицы;

б) все корни степени ≤ 5 из единицы.

183. Для различных чисел $c_1,...,c_n$ и многочлена

$f(x)=(x-c_1)...(x-c_n)$

докажите равенство $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{f'(c_1)(x-c_1)}+...+\dfrac{1}{f'(c_n)(x-c_n)}$.

184. Представьте дробь в виде суммы простейших над областями **R** и **C**:

а) $\dfrac{1}{x^3+1}$; **б)** $\dfrac{1}{x^4+4}$.

185. Разложить дробь $\dfrac{1}{x^n-1}$ на простейшие дроби над **C**.

2.1. Линейные преобразования и их матрицы

186. Пусть f – линейное преобразование, действующее в пространстве V; $\vec{x},\vec{y}\in V$, $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$. Докажите, что $f(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})=\lambda f(\vec{x})+\mu f(\vec{y})$.

187. Докажите, что образ $f(\vec{0})$ нулевого вектора при действии линейного преобразования f равен нулевому вектору. Как связаны образы $f(\vec{x})$ и $f(-\vec{x})$ векторов $\vec{x}$ и $-\vec{x}$ при действии линейного преобразования f?

188. Докажите, что проектирование p_1 пространства $\mathbf{R}^3$ на координатную ось вектора $\vec{e}_1$ параллельно координатной плоскости векторов $\vec{e}_2,\vec{e}_3$ является линейным преобразованием, и найдите его матрицу в стандартном базисе.

189. Матрица A линейного преобразования f в некотором базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ имеет вид $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Найдите матрицу A' преобразования f в новом базисе $\vec{e}_1',\vec{e}_2'$:

а) $\vec{e}_1'=\vec{e}_1-\vec{e}_2,\ \vec{e}_2'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$;

б) $\vec{e}_1'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2,\ \vec{e}_2'=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2$.

190. Линейное преобразование f в базисе, состоящем из векторов $\vec{e}_1=(2,-6,7)$, $\vec{e}_2=(2,7,-13)$, $\vec{e}_3=(-3,-3,7)$, имеет матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу A' линейного преобразования f в базисе $\overset{1}{e}{}'_1=(1,-2,1)$, $\overset{1}{e}{}'_2=(-3,-1,2)$, $\overset{1}{e}{}'_3=(2,1,2)$.

191. Докажите, что для матриц линейного преобразования выполнены следующие свойства:

а) матрицы линейного преобразования в двух различных базисах подобны;

б) две матрицы подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами линейного преобразования в подходящих базисах;

в) матрицы одного и того же преобразования в различных базисах совпадают тогда и только тогда, когда матрица перехода от одного базиса к другому коммутирует с матрицей преобразования в одном из данных базисов.

192. Пусть линейное преобразование f пространства $\mathbf{R}^2$ имеет матрицу A в базисе $\left(\overset{1}{e}{}'_1, \overset{1}{e}{}'_2\right)$. Является ли оно ортогональным и, почему:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overset{1}{e}{}'_1=(1;0)$, $\overset{1}{e}{}'_2=(1;1)$;

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overset{1}{e}{}'_1=(1;0)$, $\overset{1}{e}{}'_2=(1;1)$?

193. Найдите образ вектора $\overset{1}{x}=(x_1;x_2)$ при ортогональном преобразовании f пространства $\mathbf{R}^2$, если известна матрица A преобразования f в стандартном базисе. Как изменится положение вектора $\overset{1}{x}=(x_1;x_2)$ при этом преобразовании:

а) $A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; **г)** $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

194. Пусть f – линейное преобразование, действующее в $\mathbf{R}^n$. Докажите, что f – ортогональное преобразование тогда и только

тогда, когда f сохраняет длины векторов, т.е. для любого $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$: $\left(f\left(\vec{x}\right), f\left(\vec{x}\right)\right) = \left(\vec{x}, \vec{x}\right)$.

195. Докажите, что линейное преобразование пространства $\mathbf{R}^2$, переводящее ортонормированный базис в ортонормированный, является ортогональным.

196. Является ли симметрической матрица симметрического линейного преобразования в ортогональном базисе?

2.2. Собственные векторы и собственные значения

197. В пространстве строк $\mathbf{R}^3$ действует линейное преобразование f по правилу: $f\left(a;b;c\right) = \left(3a + c; -a + 2b - c; a + 3c\right)$. Найдите его собственные значения.

198. Докажите, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является корнем характеристического многочлена $\left|A - \lambda E\right|$, т.е.

$A^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot E = 0.$

199. Докажите, что множество всех собственных векторов преобразования f, принадлежащих одному собственному значению λ, к которому добавили нулевой вектор, образует линейное подпространство V.

200. Докажите, что матрица A порядка n подобна диагональной тогда и только тогда, когда пространство $\mathbf{R}^n$ имеет базис, состоящий из собственных векторов матрицы A.

201. Пусть $f(t)$ – многочлен; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Докажите, что матрица $f(A)$ подобна диагональной тогда и только тогда, когда $f'(1) = 0$.

202. Пусть A и B подобные матрицы порядка 3. Допустим, что пространство $\mathbf{R}^3$ имеет базис, состоящий из собственных векторов матрицы A. Докажите, что оно имеет базис, состоящий из собственных векторов матрицы B.

203. Как связаны собственные значения матриц A и A^T? Привести пример матрицы A порядка два, удовлетворяющей одновременно условиям: а) все собственные векторы матрицы A пропорциональны вектору $\overset{1}{e}_1 = (1; 0)$; б) все собственные векторы матрицы A^T пропорциональны вектору $\overset{1}{e}_2 = (0; 1)$.

204. Докажите, что симметрическая матрица A подобна диагональной D, т.е. существует обратимая матрица C, такая что $A = C^{-1}DC$. Существует ли ортогональная матрица C, удовлетворяющая равенству $A = C^{-1}DC$?

205. Найдите канонический вид и соответствующий ортонормированный базис для симметрического линейного преобразования, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -2 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 11 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

206. Для данной матрицы A найдите такую ортогональную матрицу C, что матрица $C^{-1}AC$ является диагональной:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **б)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3. Квадратичные формы

207. Производится замена переменных по формуле $X = PY$, здесь $X = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$, $Y = (y_1, ..., y_n)^{\mathrm{T}}$, P – невырожденная матрица.

а) Выясните, как связаны матрицы A и A' квадратичной формы Φ относительно множества переменных X и Y;

б) Проверьте, что матрица A' является симметрической;

в) Какое из следующих соотношений: $|A||A'| > 0$, $|A||A'| < 0$, $|A||A'| = 0$, связывающее определители матриц A и A', не может выполняться?

208. Пусть Φ – квадратичная форма от переменных $X=(x_1,...,x_n)^T$ с матрицей A; C – ортогональная матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы A, отвечающими собственным значениям $\lambda_1,...,\lambda_n$; $X'=C^{-1}X$. Докажите, что форма Φ относительно переменных X' имеет канонический вид $\Phi=\lambda_1(x_1')^2+...+\lambda_n(x_n')^2$.

209. Найдите ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к главным осям, ее канонический вид и канонический базис:

а) $11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$;

б) $x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$;

в) $5x_1^2-7x_2^2+5x_3^2-8x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$;

г) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.

210. Методом Лагранжа привести форму Φ к нормальному виду:

а) $\hat{O}=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

б) $\hat{O}=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$;

в) $\hat{O}=x_1^2-4x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-2x_3x_2$;

г) $\hat{O}=2x_1x_2-x_3^2$.

211. Найдите все значения параметра λ, при которых квадратичная форма является положительно определенной:

а) $2x_1^2+(3+2\lambda)x_2^2+2x_3^2+(4+2\lambda)x_1x_2+(2-2\lambda)x_1x_3-2\lambda x_1x_3$;

б) $(27+6\lambda-\lambda^2)x_1^2+(27+6\lambda-\lambda^2)x_2^2+(36-\lambda^2)x_3^2+$
$+(54+6\lambda-2\lambda^2)x_1x_2+(72-2\lambda^2)x_1x_3+(72-2\lambda^2)x_2x_3$;

в) $(3+2\lambda-\lambda^2)x_1^2+(12+6\lambda-4\lambda^2)x_2^2+(15+2\lambda-4\lambda^2)x_3^2+$
$+(12+6\lambda-4\lambda^2)x_1x_2+(14+4\lambda-4\lambda^2)x_1x_3+(28+6\lambda-8\lambda^2)x_2x_3$.

212. Пусть $\Phi(\vec{x})$ – квадратичная форма, а $\vec{a},\vec{b}$ – векторы, такие что $\Phi(\vec{a})>0, \Phi(\vec{b})<0$. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы.

213. Докажите, что если квадратичная форма с матрицей A положительно определена, то и квадратичная форма с матрицей A^{-1} положительно определена.

214. Докажите критерий Сильвестра для квадратичных форм от двух и трех переменных.

3.1. Число и вектор Фробениуса

215. Докажите, что положительный собственный вектор неотрицательной матрицы является ее вектором Фробениуса.

216. Проверьте, что матрица A не имеет собственных положительных векторов:

а) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

217. Докажите, что если сумма чисел в каждой строке неотрицательной матрицы A равна одному и тому же числу λ, то число Фробениуса λ_A равно λ. Какой вектор Фробениуса имеет матрица A?

218. Пусть $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\geq 0$, $I=(1;1;1)^T$, $\vec{c}=I^T A$ – вектор-строка, координата c_j которого есть сумма элементов j-го столбца матрицы A, например, $c_2=a_{12}+a_{22}+a_{32}$. Пусть s – наименьшая, S – наибольшая из координат $\vec{c}$.

Докажите, что $s\leq\lambda_A\leq S$. При этом, если $A>0$, то все неравенства строгие, за исключением случая $s=S$.

219. Найдите число и вектор Фробениуса данной матрицы:

а) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 7 & 6 & 9\end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

220. Доказать, что равновесный вектор национального дохода в модели международной торговли является вектором Фробениуса структурной матрицы торговли.

221. Зная число Фробениуса λ_A матрицы $\grave{A}$, найдите число Фробениуса следующих матриц:

а) $\alpha A + \beta E \left(\alpha > 0, \beta \geq 0\right)$; **б)** $A^k, k \geq 2$.

3.2. Балансовые модели Леонтьева и продуктивность

222. В городе С имеется три главных промышленных объекта: угольная шахта, теплоэлектроцентраль и железная дорога. Из отчетов за ряд лет известны основные величины, входящие в структурную матрицу.

А именно, чтобы добыть угля на 1 млн руб., необходимо затратить электроэнергии на 0,25 млн руб. и столько же на его транспортировку.

Чтобы произвести электроэнергии на 1 млн руб., ТЭЦ требуется затратить 0,65 млн руб. на сжигаемый уголь, 0,05 млн руб. собственной электроэнергии и 0,05 млн руб. на транспортные расходы.

Наконец, железной дороге для выполнения перевозок на 1 млн руб. надо затратить угля на 0,55 млн руб. и электроэнергии на 0,10 млн руб.

На следующую неделю внешние потребители заказали поставить им угля общей стоимостью 50 млрд руб. и электроэнергии на 25 млрд руб. Найти валовой объем каждой отрасли (в млрд руб.)

223. Дана следующая балансовая таблица по трем отраслям (отрасль I – сельское хозяйство, отрасль II – промышленность, отрасль III – энергетика).

Производители	Потребители			Потребление	Валовой выпуск
	I	II	III		
I	10	40	20	30	100
II	30	40	20	10	100
III	20	20	5	5	50

Рассчитать структурную матрицу и найти валовой выпуск для следующего варианта потребления: $\vec{d} = \left(25, 15, 10\right)$.

224. Для матрицы Леонтьева $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $0 \le a, d \le 1$, проверить справедливость утверждений:

а) $H=(E-A)^{-1}=\dfrac{1}{|E-A|}\begin{pmatrix} 1-d & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$;

б) A продуктивна тогда и только тогда, когда $|E-A|>0$.

225. Привести пример продуктивной матрицы A, для которой одна из отраслей нерентабельна.

226. Используя свойство: если $A \ge B > 0$, то $\lambda_A \ge \lambda_B$, исследовать на продуктивность матрицы A_1, A_2:

а) $A_1=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$; **б)** $A_2=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$.

227. Доказать, что положительное число $\alpha > 0$ является запасом продуктивности неотрицательной матрицы A тогда и только тогда, когда $(1+\alpha)\lambda_A = 1$.

228. Найти запас продуктивности $A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 \\ 0,7 & 0,5 \end{pmatrix}$ с точностью до 10^{-3}.

229. Пусть A, P, Q – неотрицательные матрицы порядка n. Доказать, что если $(E-A)P=E+Q$, то матрица A продуктивна.

230. Пусть A и B – неотрицательные матрицы порядка n и $A \ge B$. Доказать, что:

а) если матрица A продуктивна, то и матрица B продуктивна;

б) если $A \ge B$, то $\lambda_A \ge \lambda_B$.

231. Доказать, что если $A_1=\begin{pmatrix} A & r_T \\ r & c \\ b & d \end{pmatrix}$ продуктивна, то и A продуктивна.

4.1. Разностные уравнения, модели экономической динамики

232. Пусть x_n^* – частное решение линейного неоднородного разностного уравнения (1), $\overline{x}_n$ – частное решение соответствующего (1) линейного однородного разностного уравнения (2). Докажите, что сумма $\overline{x}_n + x_n^*$ является решением уравнения (1).

233. Докажите, что последовательности $x_n^{(1)} = p^n$ и $x_n^{(2)} = n \cdot p^n$ являются решениями однородного разностного уравнения $x_{n+2} - 2px_{n+1} + p^2 x_n = 0,\ p \in \mathrm{R}$.

234. Докажите, что если p, q – ненулевые числа, то последовательности $x_n^{(1)} = p^n$ и $x_n^{(2)} = q^n$ линейно независимы.

235. Найдите общее решение уравнения:

а) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 2^n$; **б)** $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^n$;

в) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 9$.

236. Найдите общий член последовательности

$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + 1,\ x_0 = x_1 = 0$.

237. Докажите, что если два решения линейного однородного разностного уравнения 2-го порядка $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$ линейно независимы, то их определитель Казоратти отличен от 0 во всех точках.

238. Укажите линейное однородное разностное уравнение 2-го порядка, имеющее общее решение вида:

а) $x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$; **б)** $x_n = C_1 + C_2 n$;

в) $x_n = C_1 \cos\dfrac{\pi n}{2} + C_2 \sin\dfrac{\pi n}{2}$.

239. Докажите, что если пространство решений линейного однородного разностного уравнения 2-го порядка 2-мерно.

240. Докажите, что если последовательность $x_n = \cos n\varphi$ $(0 < \varphi < \pi)$ является решением линейного однородного разностного уравнения 2-го порядка, то общее решение этого уравнения имеет вид $x_n = C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi$.

241. Найдите общее решение разностного уравнения 3-го порядка:

а) $x_{n+3} - 2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0;$

б) $x_{n+3} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0;$

в) $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 0;$

г) $x_{n+3} - 7x_{n+2} + 16x_{n+1} - 12x_n = -2.$

242. Найдите общий член периодической последовательности:

а) $x_{n+3} = x_n \left(n \geq 3\right), x_1 = 5, x_2 = 3, x_3 = 1;$

б) $x_{n+3} = x_n \left(n \geq 3\right), x_1 = 7, x_2 = 3, x_3 = 5.$

4.2. Дискретные модели экономической динамики

243. Исследуйте уравнение Хикса при $a = V, b = 0;$ опишите тип динамики экономического развития при

а) $V < 1;$ **б)** $V = 1;$ **в)** $V > 1.$

244. Решите уравнение $X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + 2^t -$ аналог уравнения Хикса при $a = V = 1, b_n = 2^n.$ Дайте экономическую интерпретацию найденного решения.

245. Найдите общее решение уравнения $a - bp_t = m + np_{t-1}$ паутинной модели рынка и опишите динамику цен в терминах параметра $k = \dfrac{n}{b}$:

а) $k < 1;$ **б)** $k = 1;$ **в)** $k > 1.$

246. Найдите текущую стоимость $X_n \left(n = \overline{1,k}\right)$ купонной облигации при следующих значениях параметров (F – номинальная стоимость купонной облигации, K – величина купона, k – число купонных периодов, r – процентная ставка за один купонный период, выраженная в частях):

а) $F = 100;$ $K = 10;$ $k = 3;$ $r = 0{,}05;$

б) $F = 100;$ $K = 10;$ $k = 5;$ $r = 0{,}15;$

в) $F = 100;$ $K = 10;$ $k = 2;$ $r = 0{,}1.$