З А Д А Ч И

для самостоятельного решения

68. Для изготовления швейных изделий двух видов имеется 50 м ткани. Для шитья одного изделия каждого вида расходуется одно и то же количество ткани – 2 м. Составьте план производства, обеспечивающий получение наибольшей выручки от продажи изделий, если цена одного изделия первого вида составляет 600 руб., а цена изделия второго вида – 200 руб., причем изделий каждого вида требуется изготовить не более 20.

69. Производственная мощность завода позволяет производить за месяц 200 электродвигателей типа А или 600 электродвигателей типа Б. Определите, сколько электродвигателей должен производить завод для достижения максимума прибыли от продажи товарной продукции, если цена двигателя типа А в три раза больше цены двигателя типа Б.

70. Металлические трубы длиной 5 м надо раскроить на заготовки трех видов длиной 2 м, 1,8 м и 1,2 м в количестве соответственно 40, 50, 60 штук. Сколько труб надо заказать, чтобы выполнить задание с минимальными отходами?

71. Какое максимальное количество комплектов прутьев длиной 1 м и 1,75 м в количестве 2 шт. и 1 шт. соответственно может поставить завод, используя однотипные заготовки длиной 4 м и 8 м в количестве 175 шт. и 125 шт. соответственно?

72. Механический цех может изготовить за смену 600 деталей первого сорта (№ 1) или 1200 деталей второго сорта (№ 2). Производственная мощность термического цеха, куда эти детали поступают на термообработку в тот же день, позволяет отработать за смену 1200 деталей № 1 или 800 № 2. Цены на детали одинаковые. Определите план выпуска деталей, при котором объем товарной продукции предприятия будет наибольшим, если механический цех работает в три смены, а термический – в две смены.

73. Для изготовления двух видов изделий А и Б фабрика расходует в качестве сырья сталь и цветные металлы, имеющиеся в ограниченном количестве. На изготовлении указанных изделий за-

няты токарные и фрезерные станки. В таблице приведены запасы стали и цветных металлов, которыми располагает предприятие, ресурсы оборудования в станко-часах на единицу изделия. В последней строке таблицы указана прибыль предприятия от продажи единицы каждого изделия.

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Норма расхода	
		Изделие А	Изделие Б
Сталь (кг)	570	10	70
Цветные металлы (кг)	490	90	50
Токарные станки (станко-часов)	5600	300	400
Фрезерные станки (станко-часов)	3400	200	100
Прибыль (тыс. руб.)		3	8

Определите план выпуска продукции, при котором будет достигнута максимальная прибыль.

74. Докажите, что множества оптимальных решений задач ЛП

(1) $f\left(\vec{x}\right) \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $A\vec{x} \leq \vec{b}$ и

(2) $-f\left(\vec{x}\right) \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $A\vec{x} \leq \vec{b}$ совпадают.

75. Докажите, что если точки $A, B, C \in R^n$ являются оптимальными решениями задачи линейного программирования $f\left(\vec{x}\right) \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $A\vec{x} \leq \vec{b}$, то оптимальным решением является любая точка треугольника ABC.

76. Докажите, что область допустимых решений задачи ЛП является выпуклым множеством.

77. Докажите, что целевая функция задачи ЛП достигает экстремума в угловой точке области допустимых решений; причем если целевая функция достигает экстремума в нескольких угловых точках, то она также достигает экстремума в любой выпуклой линейной комбинации этих точек.

78. Докажите, что задача ЛП: $f = x_1 + x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $A\vec{x} \leq \vec{b}$ разрешима тогда и только тогда, когда множество допустимых значений ограничено.

79. Приведите пример задачи ЛП вида

$f = x_1 - x_2 \to \min(\max)$ при $\vec{x} = \left(x_1, x_2\right)^T \geq 0$ и $A\vec{x} \leq \vec{b}$,

для которой $f_{\min} = -\infty$ и $f_{\max} = +\infty$.

80. Решите графическим методом задачи ЛП:

а) $f = x_1 - 4x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 23, \\ x_1 - 2x_2 \geq 1, \\ 2x_1 - x_2 \leq 1; \end{cases}$

б) $f = -18x_1 + x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 12x_1 + 35x_2 \geq 9, \\ 294x_1 - 10x_2 \geq 47, \\ 414x_1 - 7x_2 \leq 137; \end{cases}$

в) $f = 5x_1 + 2x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 16x_2 - 4 \leq 0, \\ 6x_2 - x_1 - 1 \geq 0, \\ 1 - x_2 - 3x_1 \geq 0; \end{cases}$

г) $f = 3x_1 + 2x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_2 - x_1 \leq 1, \\ x_2 \leq 2. \end{cases}$

81. Какие из следующих задач ЛП имеют бесконечное множество оптимальных решений:

а) $f = 3x_1 + 2x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19, \\ 2x_1 + x_2 \leq 13, \\ x_1 \leq 6, \\ x_2 \leq 5; \end{cases}$

б) $f = -x_1 - x_2 + 1 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 - 4x_2 \geq -10, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 10; \end{cases}$

в) $f = 4x_1 - 2x_2 + 1 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 11, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 0; \end{cases}$

г) $f = x_1 + 2x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -12, \\ 2x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 - 4x_2 \leq -3? \end{cases}$

82. Приведите пример задачи ЛП $f = a_1x_1 + a_2x_2 \to \min$ $(a_1 \neq 0, a_2 \neq 0)$ при $\vec{x} \geq 0$ и $A\vec{x} \leq \vec{b}$, область допустимых значений которой содержит какие-нибудь три точки, не лежащие на одной прямой. Может ли множество оптимальных решений задачи совпадать с указанным множеством:

а) точкой $A(1; 2)$;

б) отрезком с концами $A(2; 3)$, $B(7; 6)$;

в) лучом, выходящим из точки $A(4; 3)$ и содержащим точку $B(5; 5)$;

г) прямой, проходящей через точки $A(4; 3)$ и $B(5; 5)$?

83. Используя метод исключения переменных, сведите к задаче ЛП от двух переменных. Решите ее. Найдите решения исходной задачи:

а) $f = -3x_1 - 2x_2 + 13 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + 2x_3 = 7, \\ x_2 \geq 2; \end{cases}$

б) $f = 5x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max, \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 7; \end{cases}$

в) $f = 5x_2 + 2x_4 - 8 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8; \end{cases}$

г) $f = x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 + 3 \to \max, \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = -4, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 3. \end{cases}$$

84. Найдите оптимальные решения задачи ЛП:

а) $f = 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 - 5 \to \max, \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 18, \\ -x_1 + 4x_2 - x_5 = 8; \end{cases}$$

б) $f = -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 - 5 \to \max, \min$ при

$$\vec{x} \geq 0 \text{ и } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 25, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_5 = 6; \end{cases}$$

в) $f = x_1 + x_2 - x_3 + x_5 + 15 \to \max, \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_4 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 2; \end{cases}$$

г) $f = -x_2 - x_4 - 1 \to \max, \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 5. \end{cases}$

85. Решите следующие задачи ЛП:

а) $f = x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 \to \max, \min$ при условиях

$$\vec{x} \geq 0 \text{ и } \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3; \end{cases}$$

б) $f = 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + 14 \to \max, \min$ при условиях

$$\vec{x} \geq 0 \text{ и } \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 20, \\ 8x_1 - x_2 + x_5 = 16; \end{cases}$$

в) $f = -8x_1 + 2x_2 + 11 \to \max, \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7; \end{cases}$$

г) $f = 9x_2 + 3x_3 + 2x_5 - 4 \to \max, \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$$

86. Докажите, что значения целевой функции $f\left(\vec{x}\right)=c_0+\vec{c}\cdot\vec{x}$ возрастают быстрее всего в направлении вектора нормали $\vec{c}$ к ее линии уровня $f\left(\vec{x}\right)=\alpha$.

87. Найдите область допустимых значений и оптимальные решения следующих задач ЛП:

а) $f=4x_2-x_3+1\to\max,\min$ при $\vec{x}\geq 0$ и $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=1,\\2x_1+x_2-x_4=4,\\x_1+2x_2+x_5=5;\end{cases}$

б) $f=6x_1+x_2+4x_3-5x_4\to\max,\min$ при $\vec{x}\geq 0$ и

$$\begin{cases}3x_1+x_2-x_3+x_4=4,\\5x_1+x_2+x_3-x_4=4;\end{cases}$$

$$\vec{x}_{\max}=\left(-2t+3;\,t+1;\,4t;\,3-3t;\,0\right),t\in\left[0;1\right];\ f_{\min}=\frac{13}{5},$$

$$\vec{x}_{\min}=\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5};\,0;\,0;\,\frac{12}{5}\right);$$

в) $f=2x_1+x_2+3x_3+x_4\to\min$ при $\vec{x}\geq 0$ и

$$\begin{cases}x_1+2x_2+5x_3-x_4=4,\\x_1-x_2-x_3+2x_4=1;\end{cases}$$

г) $f=x_1+x_2+x_3+x_4\to\min$ при $\vec{x}\geq 0$ и $\begin{cases}x_1+3x_2+7x_3-x_4=6,\\x_1-x_2-x_3+3x_4=2.\end{cases}$

88. Найдите все значения параметра a, при которых точка

а) $\left(3;2\right)$ является оптимальным решением задачи ЛП

$$f=ax_1+x_2\to\min \text{ при } \vec{x}\geq 0 \text{ и } \begin{cases}x_1-x_2\leq 1,\\x_1+x_2\geq 5,\\x_1+3x_2\leq 13;\end{cases}$$

б) $\left(4;10\right)$ является единственным оптимальным решением задачи ЛП:

$$f=ax_1+x_2\to\min \text{ при } \vec{x}\geq 0 \text{ и } \begin{cases}2x_1-x_2\leq -2,\\3x_1-x_2\geq -3,\\4x_1-3x_2\geq -14.\end{cases}$$

89. Найдите все значения параметра a, при которых задача ЛП

$f\left(\vec{x}\right)=ax_1+4x_2-7\to\max,\ \vec{x}\in Conv\left(A_1,A_2,A_3\right),$

имеет бесконечно много оптимальных решений:

а) $A_1\left(0;5\right), A_2\left(2;1\right), A_3\left(4;3\right)$; **б)** $A_1\left(1;\sqrt{2}\right), A_2\left(\sqrt{2};2\right), A_3\left(2;\sqrt{2}\right)$.

90. Решите задачу об оптимизации портфеля с исходными данными:

i	0	1	2	3
σ_i	4	1	3	5
r_i		1	2	3

.

91. Докажите разрешимость задачи об оптимизации портфеля при условии, что $\min\left(\sigma_1,...,\sigma_n\right)\le\sigma_0$.

➲ Решите симплекс-методом следующие задачи ЛП.

92. $f=-2x_1+2x_2+x_3+x_5-5\to\max,$ при $\vec{x}\ge 0$ и

$$\begin{cases}3x_1-2x_2-x_3=-4,\\5x_1+3x_2+x_4=25,\\2x_1-3x_2+x_5=6.\end{cases}$$

93. $f=x_3+5x_5-24\to\max$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases}x_1+x_5+x_6=12,\\x_2+5x_5-x_6=30,\\x_3+x_5-2x_6=6,\\x_4+3x_5-2x_6=18.\end{cases}$

94. $f=2x_4-5x_5-7x_6+13\to\min$ при $\vec{x}\ge 0$ и

$$\begin{cases}x_1+3x_4-4x_5+2x_6=2,\\x_2+x_4+6x_6=9,\\x_3+x_4+2x_5+2x_6=6.\end{cases}$$

95. $f=-6x_2+3x_4-3x_5\to\min$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=6,\\2x_1+x_2+x_4=8,\\x_2-x_1+x_5=1,\\x_2+x_6=2.\end{cases}$

96. $f = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5. \end{cases}$

97. $f = x_1 + x_3 + x_4 + x_5 - 15 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8. \end{cases}$$

98. $f = -5x_1 + +5x_5 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

99. $f = x_2 + x_4 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + 3x_5 = 12, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$

100. $f = 2x_1 - x_5 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 5x_1 - 2x_3 + x_5 = 12. \end{cases}$

101. $f = 2x_2 - x_4 + 8 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ 4x_1 - x_2 + x_5 = 8. \end{cases}$

102. $f = x_1 - 6x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 - 6x_2 - x_5 = -4. \end{cases}$

103. Пусть решается задача о нахождении минимума функции f. Докажите, что если в оценочной строке

а) нет положительных чисел, то оптимальное решение найдено;

б) есть положительное число, а в соответствующем ему столбце нет положительных элементов, то $f_{\min} = -\infty$.

➲ Решите следующие задачи ЛП, используя метод искусственного базиса для преобразования системы ограничений к виду, допускающему опорное решение.

104. $f = 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to, \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 4, \\ 11x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 12. \end{cases}$$

105. $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

106. $f = -12 - 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 = -10, \\ 7x_1 + x_3 + 4x_4 = 42, \\ x_1 + 3x_2 - x_5 = 11. \end{cases}$$

107. $f = x_3 + x_4 + x_5 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 23, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 1. \end{cases}$

108. $f = x_1 + 2x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_5 = 12, \\ -x_1 + 4x_2 - x_6 = 3. \end{cases}$

109. $f = 9x_2 + 3x_3 + 2x_5 - 4 \to \max,$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_3 - x_5 = -4, \\ 3x_1 - x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$$

110. $f = x_2 + x_3 + x_5 - 14 \to \max,$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 9, \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

111. Сформулируйте двойственную задачу ЛП для поставленной исходной задачи и решите ее графическим методом. Используя теоремы двойственности, найдите оптимальное решение исходной задачи.

а) $f = -5x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 1 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -1, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq -1. \end{cases}$$

б) $f = -4x_1 + 9x_2 + 30x_3 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 2, \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 3. \end{cases}$

в) $f = 11x_1 - 3x_2 - x_3 + 3 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 2. \end{cases}$

г) $f = 6x_1 + 20x_2 + 36x_3 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 2. \end{cases}$

112. Используя теоремы двойственности, найдите оптимальное решение исходной задачи, решив сначала двойственную задачу:

а) $f = -4x_1 - 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 6; \end{cases}$$

б) $f = -4x_1 + 12x_2 + 12x_3 - 3x_4 \to \min$ при и

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 \geq 2; \end{cases}$$

в) $f = -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2 \to \min$ при условиях $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 1; \end{cases}$$

г) $f = x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 10, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4. \end{cases}$

113. Какое из неравенств $5x + 8y \leq 10$ или $10x + 16y \leq 23$ является следствием системы $x + y \leq 1,\ x + 2y \leq 3$?

114. Верно ли, что неравенство $4x - 15y + 16z \geq 0$ является следствием системы неравенств $\begin{cases} x - 2y + 3z \leq 0, \\ 2x + y + z \leq 0, \\ -3x + 5y - 7z \leq 0? \end{cases}$

115. Для каких значений параметра a неравенство $8x - ay + 24z \geq 0$ является следствием системы неравенств $\begin{cases} x - 2y + 3z \leq 0, \\ 2x + y + z \leq 0, \\ -3x + 5y - 7z \leq 0? \end{cases}$

116. Используя теорему Фаркаша-Минковского, докажите, что задача ЛП $\begin{cases} A\vec{x} \leq \vec{b}, \\ \vec{c}^{\mathrm{T}}\vec{x} \to \max \end{cases}$ разрешима только, если разрешима двой-

ственная задача $\begin{cases} A^{\mathrm{T}}\vec{y} = \vec{c}\,, \\ \vec{y} \ge 0, \\ \vec{b}^{\mathrm{T}}\vec{y} \to \min \end{cases}$, считая, что $A-$матрица размера 2×3.

117. Решите двойственным симплекс-методом задачу ЛП

$$f = -x_2 - 3x_5 \to \max \text{ при } \vec{x} \ge 0 \text{ и } \begin{cases} -x_2 - 6x_3 + x_4 = -5, \\ x_1 + 5x_2 - 19x_3 = -13, \\ 3x_2 - 6x_3 + x_5 = -2. \end{cases}$$

118. Используя решение двойственной задачи, решите задачу ЛП

$$f = 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 1 \to \max \text{ при } \vec{x} \ge 0 \text{ и } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 2. \end{cases}$$

119. Решив данную задачу ЛП

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le -2, \\ -x_1 - 4x_2 \le -8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \\ f = -x_1 - 2x_2 + 12 \to \max, \end{cases}$$

найдите оптимальное решение двойственной задачи.

120. Решите задачу ЛП

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ -x_1 + 3x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \\ f = x_1 + 2x_2 - 1 \to \min \end{cases}$$

тремя указанными методами: графическим методом, двойственным симплекс-методом, решив сначала двойственную задачу.

121. Докажите, что при преобразовании двойственным симплекс-методом с помощью минимального допустимого отношения сохраняется неотрицательность оценок ($a_{ij}, b_i, \Delta_i > 0$ и $\dfrac{\Delta_1}{a_{11}} > \Delta_3$).

Б.н.	С.ч.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	$-b_1$	$-a_{11}$	0	$\boxed{-1}$	1	a_{15}	0
x_2	b_2	$-a_{21}$	1	$-a_{22}$	0	$-a_{25}$	0
x_6	b_3	a_{31}	0	a_{33}	0	a_{35}	1
f	c	Δ_1	0	Δ_3	0	Δ_5	0
	$\partial/\text{о}$	$\frac{\Delta_1}{a_{11}}$	–	Δ_3		–	

122. Найдите разными способами оптимальное решение задачи ЛП. Сравните полученные результаты.

$$f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max \text{ при } \vec{x} \geq 0 \text{ и } \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

123. Для транспортной таблицы укажите опорное решение.

а)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	8	6	9	2	160
A_2	7	16	12	12	60
A_3	6	15	8	3	180
b_j	80	60	60	200	

б)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	10	4	8	90
A_2	14	25	13	23	60
A_3	12	13	6	12	140
b_j	80	40	90	80	

в)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	4	8	6	80
A_2	11	15	24	18	50
A_3	11	22	15	14	180
b_j	100	10	40	160	

124. Найдите оптимальное решение транспортной задачи.

а)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	5	8	6	70
A_2	12	17	13	17	60
A_3	10	18	10	14	140
b_j	90	50	100	30	

б)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	14	11	18	30
A_2	3	17	1	10	130
A_3	9	16	11	18	120
b_j	50	70	30	130	

в)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	9	14	10	120
A_2	20	15	20	20	140
A_3	12	8	14	17	70
b_j	80	90	70	90	

г)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14	9	12	4	150
A_2	12	15	19	16	70
A_3	15	19	15	12	210
b_j	140	50	100	140	

125. Верно ли, что разрешимая транспортная задача имеет правильный баланс? Приведите пример неразрешимой транспортной задачи.

126. Докажите, что множество допустимых решений транспортной задачи с правильным балансом непусто.

127. Докажите, что множество допустимых решений транспортной задачи является выпуклым ограниченным многогранником.

128. Докажите критерий разрешимости транспортной задачи.

129. Докажите в частном случае $n = 2, m = 3$ теорему о потенциалах: *если допустимое решение* $X = \left(x_{ij}\right)\left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\right)$ *транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы поставщиков* $u_i\ \left(i = \overline{1,n}\right)$ *и потребителей* $v_j\ \left(j = \overline{1,m}\right)$, *удовлетворяющие условиям*:

$u_i + v_j = c_{ij}$, если $x_{ij} > 0$,

$u_i + v_j \le c_{ij}$, если $x_{ij} = 0$.

130. Решите следующие транспортные задачи с неправильным балансом, вводя фиктивного поставщика или потребителя с нулевыми тарифами перевозок.

а)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	7	4	7	100
A_2	10	13	24	7	100
A_3	8	19	12	18	200
b_j	90	80	30	170	

б)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	13	12	3	60
A_2	2	16	4	6	125
A_3	13	4	17	16	75
b_j	100	100	50	50	

в)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	6	2	4	75
A_2	18	22	11	3	185
A_3	18	9	6	11	90
b_j	40	70	90	115	

г)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	3	7	4	95
A_2	12	9	8	13	65
A_3	23	14	3	8	130
b_j	40	110	85	105	

131. Найдите решение транспортной задачи с таблицей

а)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	4	7	9	100
A_2	16	5	12	4	100
A_3	8	11	12	5	200
b_j	80	110	90	120	

,

если из A_1 в B_2 и из A_2 в B_3 перевозки не могут быть осуществлены;

б)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	14	6	21	120
A_2	20	13	17	14	90
A_3	8	21	6	7	180
b_j	95	110	80	70	

,

если из A_3 в B_2 перевозки не могут быть осуществлены и из A_1 в B_4 должно быть переведено 70 ед. груза;

в)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	12	16	11	150
A_2	8	2	4	2	140
A_3	9	15	16	7	110
b_j	75	145	120	60	

,

если из A_3 в B_4 перевозки запрещены, из A_1 в B_3 должно быть переведено не менее 40 ед. груза, а из A_3 в B_1 – не более 50 ед. груза.

132. В области имеются два цементных завода и три потребителя их продукции – домостроительные комбинаты. В таблице указаны суточные объемы производства цемента, суточные потребности в нем комбинатов и стоимость перевозки 1 т цемента от каждого завода к каждому комбинату.

Заводы	Производство цемента (т/сут.)	Стоимость перевозки 1 т цемента (руб.)		
		Комбинат 1	Комбинат 2	Комбинат 3
1	40	1000	1500	2500
2	60	2000	3000	3000
Потребность в цементе (т/сут)		50	20	30

Требуется составить план суточных перевозок цемента с целью минимизации транспортных расходов.

133. Три предприятия-изготовителя, производящие сельскохозяйственные машины, снабжают своей продукцией пять кооперативов. Каждое предприятие имеет определенный план выпуска: первое предприятие – 200 единиц, второе – 500 единиц и третье – 300 единиц, а каждый кооператив – план поставок: первый кооператив – 150 ед., второй – 50 ед., третий – 100 ед., четвертый – 400 ед., пятый – 300 ед. Затраты в денежных единицах на перевозку единицы продукции с предприятий на пункты сбыта приведены в следующей таблице:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Определите план перевозок, чтобы совокупные расходы по перевозке продукции с предприятий на пункты сбыта были минимальными.