ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Ответы к упражнениям 1.1.–3.3.

1. $f = 1000(3x_1 + 2x_2) \to \max$ при $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 100, \\ 0 \le x_1 \le 40, \\ 0 \le x_2 \le 20, \end{cases}$

где x_i – число изделий i-го вида $(i = 1,2)$.

2. $f = 30(x_1 + 2x_2) \to \min$ при $\begin{cases} 70x_1 + 74x_2 \ge 70, \\ x_1 + 24x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

где x_1, x_2 – суточное потребление яблок и абрикосов (в кг).

3. Рассмотрим таблицу

Варианты разреза	Количество заготовок		Отходы
	45	35	
№ 1	2	0	20
№ 2	0	3	5
№ 3	1	1	30

$f = 20x_1 + 5x_2 + 30x_3 \to \min$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + x_3 \ge 40, \\ 3x_2 + x_3 \ge 30, \end{cases}$

где x_i – количество прутьев, разрезанных по i-му варианту, $i = 1,2,3$.

4. Пусть x_1, x_2 – количество произведенного чая сорта А и Б соответственно. Для реализации плана (x_1, x_2) необходимо $0,5x_1 + 0,2x_2$ т индийского чая, значит, $0,5x_1 + 0,2x_2 \le 600$. Рассуждая аналогично с другими сортами чая, приходим к задаче ЛП: $f = 320x_1 + 290x_2 \to \mathrm{ma}$ при $\vec{x} \ge 0$ и

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,2x_2 \le 600, \\ 0,2x_1 + 0,6x_2 \le 870, \\ 0,3x_1 + 0,2x_2 \le 430. \end{cases}$$

5. Пусть x_1, x_2 – количество машин типа А и Б, отремонтированных за год. Учитывая производственные возможности каждого цеха, получаем задачу ЛП: $f = 10^3 \cdot (20x_1 + 24x_2) \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{80} + \dfrac{x_2}{320} \leq 1, \\ \dfrac{x_1}{110} + \dfrac{x_2}{110} \leq 1, \\ \dfrac{x_1}{240} + \dfrac{x_2}{120} \leq 1, \\ \dfrac{x_1}{160} + \dfrac{x_2}{80} \leq 1. \end{cases}$$

6. $f = 58(5x_1 + 8x_2) + 40(6x_1 + 4x_2) + 32(3x_1 + x_2) \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 \leq 8, \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 81, \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 70, \\ 3x_1 + x_2 \leq 26, \end{cases}$$

где x_1, x_2 – число скорых и пассажирских поездов.

7. **а)** $f = 20x_1 + 5x_2 + 30x_3 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = 40, \\ 3x_2 + x_3 - x_5 = 30; \end{cases}$

б) $f = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 8x_3 + x_4 = 20, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_5 = 44, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 25. \end{cases}$

8. **а)** $f = -12x_1 - 8x_2 + 200 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 60, \\ x_1 + 3x_2 \leq 40, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 50; \end{cases}$

б) $f = -15x_{11} + 8x_{12} - 30x_{13} + 9500 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 80, \\ x_{12} \leq 50, \\ x_{13} \leq 50. \end{cases}$$

9. *Указание*. Множество допустимых значений является выпуклым. Линейная функция, принимающая равные значения на концах отрезка является постоянной на нем.

10. *Указание*. **а)** $M=\frac{1}{6}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C$; **б)** $M=\frac{2}{9}A+\frac{3}{9}B+\frac{4}{9}C$;

в) $M=\frac{2}{11}A+\frac{4}{11}B+\frac{5}{11}C$; **г)** $M=\frac{1}{7}A+\frac{2}{7}B+\frac{4}{7}C$.

11. *Указание*. Целевая функция константа.

12. **а)** $f_{\min}=f(3;1)=0$, $f_{\max}=f(1;3)=2$;

б) $f_{\min}=f(4;5)=-41$, $f_{\max}=f(2;1)=-13$;

в) $f_{\min}=f(0;1)=-5$, $f_{\max}=f(4;0)=28$.

13. **а)** $f_{\max}=+\infty$; **б)** $f_{\min}=-\infty$.

14. *Указание*. Проверьте, что $f\left(\vec{x}_0+t\vec{c}\right)-f\left(\vec{x}_0\right)>0$ при $t>0$.

15. **а)** Вершины треугольника $(2,0),(5,7),(3,0)$; $f_{\max}=11$, $\vec{x}_{\max}=(5;7)$;

б) Вершины треугольника $A(1,1),B(2,3),C(5,2)$; $f_{\max}=12$, $\vec{x}_{\max}=(5;2)$;

в) Вершины треугольника $(2,2),(3,1),(6,4)$; $f_{\min}=6$, $\vec{x}_{\min}=(3;1)$;

г) Вершины треугольника $A(3,2),B\left(\frac{30}{7},\frac{23}{7}\right),C\left(\frac{15}{14},\frac{32}{7}\right)$;

$f_{\min}=12$, $\vec{x}_{\min}=(3;2)$.

16. **а)** 4-угольник с вершинами $(0,6),(0,8),(2,4),(4,0)$; $f_{\min}=-40$, $\vec{x}_{\min}=(0;8)$;

б) 4-угольник с вершинами $(0,1),(0,3),(2,0),(4,0)$; $f_{\min}=-4$, $\vec{x}_{\min}=(4;0)$;

в) Трапеция с вершинами $(0,2),\left(0,\frac{7}{2}\right),\left(\frac{4}{3},0\right),\left(\frac{7}{3},0\right)$;

$f_{\max}=\frac{21}{2}$, $\vec{x}_{\max}=\left(0;\frac{7}{2}\right)$;

г) 4-угольник с вершинами $A\left(0,\frac{1}{5}\right), B(0,1), C(2,3), D(4,1)$; $f_{\max}=19,\ \vec{x}_{\max}=(4;1)$.

17. **а)** Полоса с параллельными сторонами $f_{\min}=2,\ \vec{x}_{\min}=(0;2)$.

б) Полоса, похожая на карандаш, $f_{\max}=0,\ \vec{x}_{\max}=(0;0)$.

в) Вертикальная полоса с вершинами $(0,2),\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right),(2,3)$; $f_{\min}=-\infty$.

г) Бесконечная область (от угла с вершиной $(-1,0)$ отрезан треугольник), имеющая вершины $(1,2),\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{18}{5}\right)$; $f_{\min}=7$, $\vec{x}_{\min}=(1;2)$.

18. **а)** Вершины $-A(0,2), B(0,4), C(3,5), D(6,0), E(4,0)$;

$f_{\max}=21, \vec{x}_{\max}=(3;5)$.

б) Вершины $-(0,0),(0,2),\left(\dfrac{38}{7},\dfrac{12}{7}\right),(4,6),(2,0)$;

$f_{\max}=16, \vec{x}_{\max}=(4;6)$.

в) Вершины $-(0,0),(0,3),\left(\dfrac{10}{11},\dfrac{48}{11}\right),(5,6),(6,0)$;

$f_{\max}=23, \vec{x}_{\max}=(5;6)$.

г) Вершины $-A(0,0), B(0,1), C\left(\dfrac{7}{6},\dfrac{17}{3}\right), D\left(\dfrac{15}{4},\dfrac{1}{2}\right), E(3,0)$;

$f_{\max}=\frac{41}{6}, \vec{x}_{\max}=\left(\dfrac{7}{6},\dfrac{17}{3}\right)$.

19. **а)** Вершины $-A(2,3), B(5,2), C(6,4)$; $f_{\min}=-20$,

$\vec{x}_{\min}=(2+4t,3+t), t\in[0;1]$.

б) Вершины $-A_1(0,4), A_2(4,1), A_3(4,5), A_4(7,3)$;

$f_{\min}=-16, \vec{x}_{\min}=(4t,4+t), t\in[0;1]$.

в) Вершины $-A(0,4), B(0,5), C\left(\dfrac{27}{8},\dfrac{85}{8}\right), D(14,0), E(4,0)$;

$f_{\max}=14, \vec{x}_{\max}=\left(14-\dfrac{85}{8}t,\dfrac{85}{8}t\right), t\in[0;1]$.

г) Угол с отрезанным треугольником; вершины – $A(2,3), B(5,2)$; $f_{\max} = 7, \vec{x}_{\max} = (2+t, 3+3t), t \geq 0.$

20. **а)** Вершины – $A_1\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right), A_2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right), A_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$;

$f_{\max} = -2, \vec{x}_{\max} = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{5}\right).$

б) Вершины – $A\left(0, \frac{1}{5}\right), B\left(0, \frac{1}{4}\right), C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), D\left(\frac{12}{49}, \frac{13}{49}\right)$,

$f_{\max} = \frac{2}{3}, \vec{x}_{\max} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right).$

в) Вершины – $A\left(\frac{1}{2}, 0\right), B\left(0, \frac{1}{4}\right), C\left(0, \frac{1}{3}\right), D\left(2, \frac{1}{6}\right), E(2,0)$,

$f_{\min} = -1, \vec{x}_{\min} = \left(0; \frac{1}{3}\right); f_{\max} = 4, \vec{x}_{\max} = (2; 0).$

г) Бесконечная область с вершинами $(1,0),(0,1),(0,2)$; $f_{\min} = 1$, $\vec{x}_{\min} = (1; 0).$

21. $f_{\max} = 14; \quad \vec{x}_{\max} = (0; 0; 2; 0; 9).$

22. $f_{\max} = 16; \quad \vec{x}_{\max} = (4; 6; 10; 0; 0).$

23. $f_{\max} = 23; \quad \vec{x}_{\max} = (5; 6; 9; 0; 0).$

24. $f_{\min} = 2; \quad \vec{x}_{\min} = (4; 1; 0; 0; 5).$

25. $f_{\max} = 17; \quad \vec{x}_{\max} = (1; 0; 3; 0; 2).$

26. $f_{\min} = 0; \quad \vec{x}_{\min} = (3; 2; 1; 0).$

27. $f_{\max} = 20; \quad \vec{x}_{\max} = (6; 7; 0).$

28. $f_{\max} = 11; \quad \vec{x}_{\max} = (6; 1).$

29. $f_{\max} = 22; \quad \vec{x}_{\max} = (2; 6; 33; 0; 0).$

30. $f_{\max} = 36; \quad \vec{x}_{\max} = (6; 2; 9; 0; 0).$

31. **а)** $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 12, \\ 5x_1 - x_3 + x_4 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_5 = 4, \end{cases} \quad \vec{x}_{баз} = \left(0; 6; 0; 14; \frac{1}{2}\right);$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 6, \\ -10x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 6, \\ 2x_2 + 9x_5 = 12. \end{cases} \quad \vec{x}_{баз} = \left(2; 0; 0; 2; \frac{4}{3}\right).$

32. $f_{\max} = 10,\ \vec{x}_{\max} = (0,2).$

33. $f_{\max} = 3,\ \vec{x}_{\max} = (1;0;0;4).$

34. $f_{\min} = 12;\quad \vec{x}_{\min} = (3;2;0;0;9).$

35. $f_{\min} = 7;\quad \vec{x}_{\min} = (1;2;0;0;4).$

36. $f_{\min} = 6;\quad \vec{x}_{\min} = (3;1;0;3;0).$

37. $f_{\max} = 12;\quad \vec{x}_{\max} = (5;2;0;0;7).$

38. $f_{\min} = 9;\quad \vec{x}_{\min} = (2;3;0;15;0).$

39. $f_{\min} = -\infty.$

40. $f_{\max} = \dfrac{1}{3},\ \vec{x}_{\max} = \left(\dfrac{4}{3}; 0; 0; \dfrac{1}{3}; \dfrac{13}{3}\right).$

41. **а)** и **в)**; **б)** и **г)**.

42. **а)** $\varphi = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 - 7y_4 - 4 \to \min$ при $y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0$ и

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 - 4y_4 \ge 2, \\ y_1 + 2y_2 - 3y_3 + 5y_4 \ge 3; \end{cases}$$

б) $\varphi = 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to \max$ при $y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0$ и

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 3, \\ 2y_1 - 3y_2 - 4y_3 \le 2, \\ 3y_1 + 4y_2 - 5y_3 = -1; \end{cases}$$

в) $\varphi = 4y_1 + 7y_2 + 1 \to \max$ при $\begin{cases} y_1 + 4y_2 \ge 4, \\ 2y_1 - 5y_2 \ge -3, \\ 3y_1 + 6y_2 \ge 0; \end{cases}$

г) $\varphi = -3y_1 + 5y_2 - 10y_3 - 15 \to \min$ при $y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \le 0$ и

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 - 6y_3 \ge 11, \\ -2y_1 + 7y_3 \le -12, \\ 4y_2 - 8y_3 = -32. \end{cases}$$

43. $f_{\max} = -(-f)_{\min} = 12,\ \vec{x}_{opt} = (0;0;4)$ (треугольник).

44. $f_{\min} = 6,\ \vec{x}_{opt} = (0;1;1)$ (треугольник).

45. $f_{\min} = 42,\ \vec{x}_{opt} = (0;1;1;0)$ (4-угольник).

46. $f_{\min} = 50,\ \vec{x}_{opt} = (0;1;5)$ (5-угольник).

47. $f_{\min} = 52;\ \vec{x}_{opt} = (8;2;0;0)$ (6-угольник).

48. $f_{\min} = -14, \vec{x}_{opt} = (13;\, 9;\, 0)$ (угол).

49. $f_{\min} = -\infty, f_{\max} = \infty.$ *Указание.* Построить двойственные задачи и проверить, что их системы линейных ограничений несовместны.

50. **а)** $f_{\min} = 6a,$ множеством оптимальных решений является отрезок с концами $X_1 = (a, 0, 0)$ и $X_2 = (0, 0, 2a)$;

б) $f_{\min} = -3b, \vec{x}_{\min} = (b, 0, 0).$

51. $f_{\max} = 11, \vec{x}_{\max} = (1, 0, 0, 3, 1).$

52. $f_{\max} = -9, \vec{x}_{\max} = (1, 1, 0, 1, 0).$

53. $f_{\max} = -16, \vec{x}_{\max} = (0, 4, 0, 2, 1).$

54. $f_{\max} = 32, \vec{x}_{\max} = (3, 2, 1, 0, 0).$

55. $f_{\max} = -21, \vec{x}_{\max} = (0, 0, 0, 2, 3).$

56. $f_{\max} = 7, \vec{x}_{\max} = (2;\, 1;\, 0;\, 4;\, 0).$

57. $f_{\max} = 12, \vec{x}_{\max} = (5;\, 2;\, 0;\, 0;\, 7).$

58. Задача неразрешима; система ограничений несовместна.

59. Задача неразрешима; система ограничений несовместна.

60. *Указание.* Рассмотреть знаки a_{ij}.

61. **а)** $X = \begin{pmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 10 & 40 & 0 \\ 10 & 0 & 70 \end{pmatrix}$; **б)** $X = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 20 \\ 0 & 0 & 40 \\ 40 & 0 & 20 \end{pmatrix}$;

в) $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{pmatrix}.$

62. **а)** Оптимальное**; б)** не оптимальное**.**

63. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{pmatrix}, \; f(X^*) = 1330.$

64. **а)** $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 100 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix}, f(X^*) = 1880;$

б) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 70 \\ 50 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 40 & 90 \end{pmatrix}$, $f\left(X^*\right) = 3420;$

в) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 80 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 30 & 90 & 0 \end{pmatrix}$, $f\left(X^*\right) = 2750;$

г) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 0 & 90 \\ 30 & 0 & 30 & 20 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f\left(X^*\right) = 3300.$

65. **а)** 4; **б)** 4.

66. $X = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1,5 & 2,5 \end{pmatrix}.$

67. Пусть $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ – допустимое решение. Тогда система нетривиальных ограничений имеет вид $x + y = a_1$, $z + t = a_2$, $x + z = b_1, y + t = b_2$. Ее общее решение –
$\left\{ x = t - a_2 + b_1, y = -t + b_2, z = -t + a_2 \right\}$.
Учитывая неотрицательность переменных, получаем, что $t \in [p, q]$, где $p = \max\left(0, a_2 - b_1\right)$, т.е. t изменяется на отрезке с целыми концами. Поскольку целевая функция является линейной относительно t, то она достигает оптимального значения либо в точке $t = p$, либо в точке $t = q$. Но в таком случае все значения оптимального решения являются целыми числами. Заметим, что обобщение этого утверждения справедливо для любых параметров m, n, а не только $m = n = 2$, но требует других соображений.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

68. $f = 200\left(3x_1 + x_2\right) \to \max$ при $\begin{cases} 2\left(x_1 + x_2\right) \le 50, \\ 0 \le x_1 \le 20, \\ 0 \le x_2 \le 20, \end{cases}$

где x_i – число изделий i-го вида $\left(i = 1, 2\right)$.

69. Пусть x_1, x_2 – доля дней, когда завод производил электродвигатели типа А и Б, соответственно; c – цена двигателя типа Б, значит, цена двигателя типа А равна $3c$. Число двигателей типа А, произведенных заводом, равно $200x_1$; для типа Б – $600x_2$. Функция прибыли

$$f = c\left(3\cdot 200x_1 + 600x_2\right) = 600c\left(x_1 + x_2\right) \to \max \text{ при } \begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

70. *Решение*. Рассмотрим таблицу.

Варианты разреза	Количество заготовок			Отходы
	2	1,8	1,2	
№ 1	2	0	0	1
№ 2	1	1	1	0
№ 3	1	0	2	0,6
№ 4	0	2	1	1,2
№ 5	0	1	2	0,8
№ 6	0	0	4	0,2

Пусть x_i – количество прутьев, разрезанных по i-му варианту, $i = 1,...,6.$ Тогда приходим к задаче ЛП:

$$f = 0.1\left(10x_1 + 6x_3 + 2x_4 + 8x_5 + 2x_6\right) \to \min \text{ при } \overleftrightarrow{x} \ge \text{ и}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 40, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 \ge 50, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 4x_6 \ge 60. \end{cases}$$

71. *Решение*. Рассмотрим таблицы, в которых указаны возможные варианты разреза заготовок требуемой длины.

Варианты разреза (4 м)	Количество заготовок	
	1	1,75
№ 1	4	0
№ 2	2	1
№ 3	0	2

Варианты разреза (8 м)	Количество заготовок	
	1	1,75
№ 1	8	0
№ 2	6	1
№ 3	4	2
№ 4	2	3

№ 5	1	4

Пусть x_i – количество прутьев длиной 4 м, разрезанных по i-му варианту, $i=1,2,3$; y_i – количество прутьев длиной 8 м, разрезанных по i-му варианту, $i=1,...,5$.

Число заготовок длиной 1 м равно

$4x_1+2x_2+8y_1+6y_2+4y_3+2y_4+y_5$,

число заготовок длиной 1,75 м равно

$x_2+2x_3+y_2+2y_3+3y_4+4y_5$.

Ограничения $\vec{x}\ge 0$ и

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 175, \\ y_1+y_2+y_3+y_4+y_5\le 125, \\ 4x_1+2x_2+8y_1+6y_2+4y_3+2y_4+y_5\ge 2\left(x_2+2x_3+y_2+2y_3+3y_4+4y_5\right). \end{cases}$$

Целевая функция $f=x_2+2x_3+y_2+2y_3+3y_4+4y_5\to\max$. Число $f_{\max}$ совпадает с максимальным числом искомых комплектов.

72. $f=3\left(x_1+x_2\right)\to\max$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} \dfrac{x_1}{600}+\dfrac{x_2}{1200}\le 1, \\ \dfrac{3x_1}{2400}+\dfrac{3x_2}{1600}\le 1, \end{cases}$

где x_1,x_2 – план выпуска деталей сорта 1 и 2 за одну смену.

73. $f=3x_1+8x_2\to\max$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} 10x_1+70x_2\le 570, \\ 90x_1+50x_2\le 490, \\ 300x_1+400x_2\le 5600, \\ 200x_1+100x_2\le 3400, \end{cases}$

где x_1,x_2 – план выпуска изделий А и Б соответственно.

74. $f\left(\vec{x}\right)\ge a\Leftrightarrow -f\left(\vec{x}\right)\le -a.$

75. *Указание*. Проверить, что точка $M=pA+qB+rC$, где $p,q,r\ge 0$ и $p+q+r=1$ является решением системы: $\vec{x}\ge 0$ и $A\vec{x}\le\vec{b}$, и $f\left(M\right)=f\left(A\right)$, если $f\left(A\right)=f\left(B\right)=f\left(C\right)$.

76. *Указание*. Множество решений линейного неравенства $\vec{a}\cdot\vec{x}\le b$ выпукло. Пересечение выпуклых множеств – выпукло.

77. *Указание*. Пусть M – допустимое решение задачи ЛП: $f = \vec{c} \cdot \vec{x}$ при $\vec{x} \in X$, и $f(M) = a$. Если точка M не является угловой для выпуклой области X, то можно сделать сдвиг гиперплоскости функции $f = a$ в направлении ее нормали $\vec{c}$, и тем самым увеличить значение целевой функции. Если значения целевой функции в некоторых точках равны числу a, то она имеет значение a в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных точек.

78. Линия уровня $f = \alpha(\alpha > 0)$ отсекает в первом квадранте треугольник с вершинами: $O(0,0), A(\alpha,0), B(0,\alpha)$. Если задача ЛП разрешима, то множество допустимых решений содержится в ΔOAB при $\alpha = f_{\max}$, значит, ограничено. Обратно, если множество допустимых решений ограничено, то задача ЛП очевидно разрешима.

79. В качестве системы линейных ограничений подходит система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \end{cases}$$

так как $f(x_1, 2x_1) = -x_1$; $f(2x_2, x_2) = x_2$.

80. **а)** Система ограничений несовместна.

б) Вершины – $A_1\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right), A_2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right), A_3\left(\frac{1}{2}, 10\right)$; $f_{\min} = -\frac{41}{7}$,

$\vec{x}_{\min} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right)$.

в) Вершины – $A\left(0, \frac{1}{6}\right), B\left(0, \frac{1}{4}\right), C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), D\left(\frac{5}{19}, \frac{4}{19}\right)$; $f_{\max} = 3$,

$\vec{x}_{\max} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

г) Вершины – $A_1(0,0), A_2(0,1), A_3(1,2)$, $A_4(2,2)$, $A_5\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$,

$A_6(4,0)$; $f_{\max} = \frac{38}{3}$, $\vec{x}_{\max} = \left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

81. **б)** и **в)**;

а) Вершины – $A_1(0,0), A_2(0,5), A_3(2,5), \quad A_4(5,3), A_5(6,1),$ $A_6(6,0)$; $f_{\max}=21, \vec{x}_{\max}=(5;3)$.

б) Вершины – $A(2,3), B(4,1), C(6,4)$; $f_{\max}=-4$, $\vec{x}_{\max}=(2t+2,-2t+3), t\in[0;1]$.

в) Угол с отрезанным треугольником; вершины – $A(1,4), B\left(\frac{11}{5},\frac{11}{5}\right)$; $f_{\max}=-3$, $\vec{x}_{\max}=(1+t,4+2t), t\ge 0$.

г) Вершины – $A(0,4), B(1,1), C(3,6), D(5,2)$; $f_{\max}=15, \vec{x}_{\max}=(3;6)$.

82. Да, кроме пункта **г)**, прямая AB содержит точку $(-1;-7)$ с отрицательными координатами.

83. **а)** Вершины – $A(1,2), B\left(\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right), C(3,2)$; $f_{\min}=-\frac{2}{3}$,

$$\vec{x}_{\min}=\left(\frac{7}{3},\frac{10}{3},\frac{7}{6}\right).$$

б) Вершины – $A_1(2,0), A_2\left(\frac{5}{2},0\right), A_3\left(\frac{11}{3},\frac{10}{3}\right), A_4(5,2)$;

$$f_{\max}=25,\ \vec{x}_{\max}=\left(-\frac{4}{3}t+5,\frac{4}{3}t+2,-4t+4,12t,0\right), t\in[0;1];$$

$$f_{\min}=10,\ \vec{x}_{\min}=(2;0;0;2;5).$$

в) Вершины – $A_1(0,0), A_2(0,4), A_3(2,6), A_4\left(\frac{15}{2},\frac{1}{2}\right), A_5(5,0)$;

$$f_{\max}=22,\ \vec{x}_{\max}=(2;6;33;0;0).$$

г) Угол с отрезанным треугольником; вершины – $A(2,0), B\left(\frac{5}{2},0\right)$; $f_{\max}=\infty$; $f_{\min}=13$, $\vec{x}_{\min}=(2;3;0;0;2)$.

84. **а)** Вершины – $A_1(0,2), A_2(0,3), A_3(2,6), A_4(4,3)$; $f_{\max}=19$, $\vec{x}_{\max}=(2;6;0;0;14)$; $f_{\min}=6$, $\vec{x}_{\min}=(4;3;12;0;0)$.

б) Вершины – $A_1(0,2), A_2(0,3), A_3(2,5), A_4\left(\frac{31}{7},\frac{20}{21}\right), A_5(3,0)$;

$$f_{\max}=18,\ \vec{x}_{\max}=(2;5;0;0;17);\ f_{\min}=2,\ \vec{x}_{\min}=(3;0;13;10;0).$$

в) Угол с отрезанным треугольником; вершины – $A\left(\frac{3}{5},\frac{24}{5}\right), B(2,2)$; $f_{\max}=\infty$, $f_{\min}=12$, $\vec{x}_{\min}=(2;\,2;\,7;\,0;\,0)$.

г) Вершины – $A_1(0,2), A_2(0,5), A_3(4,3), A_4(2,0), A_5\left(\frac{5}{2},0\right)$.

$f_{\max}=-1$, $\vec{x}_{\max}=(2;\,0;\,8;\,0;\,1)$; $f_{\min}=-9$,
$\vec{x}_{\min}=(4-4t;\,2t+3;\,0;\,5-2t;\,10t), t\in[0;1]$.

85. **а)** Угол с отрезанной частью; вершины $A(0,0), B(0,1), C(1,0)$;
$f_{\max}=2$, $\vec{x}_{\max}=(1;\,0;\,1;\,0)$; $f_{\min}=-\infty$.

б) Вершины – $A\left(\frac{16}{7},\frac{16}{7}\right), B(1,4), C(3,8)$; $f_{\max}=19$,
$\vec{x}_{\max}=(3;\,8;\,0;\,20;\,0)$; $f_{\min}=5$, $\vec{x}_{\min}=(1;\,4;\,0;\,0;\,12)$.

в) Вершины – $A\left(\frac{4}{3},0\right), B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right), C\left(\frac{25}{12},\frac{5}{3}\right), D\left(\frac{15}{8},0\right)$;

$f_{\max}=\frac{1}{3}$, $\vec{x}_{\max}=\left(\frac{4}{3};\,0;\,0;\,\frac{1}{3};\,\frac{13}{3}\right)$; $f_{\min}=-4$,

$\vec{x}_{\min}=\left(\frac{15}{8};\,0;\,\frac{13}{8};\,\frac{5}{2};\,0\right)$.

г) Угол, от которого отрезан треугольник; вершины –
$A(0,0), B\left(0,\frac{3}{2}\right)$; $f_{\max}=\infty$; $f_{\min}=15$, $\vec{x}_{\min}=(2;\,1;\,0;\,0;\,5)$.

86. Пусть векторы $\vec{v}$ и $\vec{c}$ имеют одинаковую длину, φ – угол между ними, t – положительное число. Тогда имеем

$$f\left(\vec{x}_0+t\vec{c}\right)-f\left(\vec{x}_0+t\vec{v}\right)=t\vec{c}\cdot\left(\vec{c}-\vec{v}\right)=t\vec{c}^{\,2}\left(1-\cos\varphi\right)\geq 0,$$

причем равенство имеет место только в случае сонаправленности векторов $\vec{v}$ и $\vec{c}$, что и доказывает требуемое утверждение.

87. **а)** Треугольник с вершинами $A(1,2), B\left(\frac{9}{5},\frac{2}{5}\right), C(3,1)$;

$f_{\max}=5$.

б) Вертикальная полоса с вершинами $A(0,0), B(1,1)$; $f_{\max}=4$,
$\vec{x}_{\max}=(0;\,4;\,0;\,0)$; $f_{\min}=-\infty$.

в) 4-угольник с вершинами $A(0,0), B(0,2), C(1,1), D\left(\frac{1}{2},0\right)$;

$f_{\max}=5,\ \vec{x}_{\max}=(2-2t;1+2t;\ 0;\ 2t), t\in[0;1];\ f_{\min}=4,$
$\vec{x}_{\min}=(0;\ 0;\ 1;\ 1).$

г) 4-угольник с вершинами $A(0,0), B\left(0,\frac{3}{2}\right), C(1,1), D\left(\frac{1}{2},0\right)$;

$f_{\max}=4,\ \vec{x}_{\max}=\left(3-3t;1+\frac{3}{2}t;\ 0;\ \frac{3}{2}t\right), t\in[0;1];\ f_{\min}=2,$
$\vec{x}_{\min}=(0;\ 0;\ 1;\ 1).$

88. **а)** $-1\le a\le 1$; если неравенства строгие, то точка A – единственное оптимальное решение; если $a=1$, то множество оптимальных решений – отрезок AC, где $C(1;\ 4)$; если $a=-1$, то множество оптимальных решений – отрезок AB, где $B(4;\ 3)$;

б) $a<-2$.

89. **а)** $a=2$; **б)** $a=-4\sqrt{2}, a=4$.

90. $f_{\max}=\frac{5}{2}; \vec{x}_{\max}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t;\ \frac{1}{2}t;-\frac{1}{4}t+\frac{3}{4}\right), t\in[0;1].$

91. *Указание.* Целевая функция определена на непустом ограниченном многограннике, значит, достигает на нем оптимального значения.

92. $f_{\max}=18;\quad \vec{x}_{\max}=(2;5;0;0;17).$

93. $f_{\max}=20;\quad \vec{x}_{\max}=(0;0;9;7;7;5).$

94. $f_{\min}=-5;\quad \vec{x}_{\min}=\left(5;0;0;0;\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right).$

95. $f_{\min}=-17;\quad \vec{x}_{\min}=\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3};0;0;3;\frac{2}{3}\right).$

96. $f_{\min}=\frac{71}{10};\quad \vec{x}_{\min}=\left(\frac{71}{10};0;0;\frac{13}{10};0;\frac{2}{5}\right).$

97. $f_{\max}=\frac{41}{6};\quad \vec{x}_{\max}=\left(\frac{7}{6};\frac{17}{3};0;\frac{62}{3};0\right).$

98. $f_{\min}=-16;\quad \vec{x}_{\min}=\left(\frac{28}{5};0;0;\frac{1}{5};\frac{12}{5}\right).$

99. $f_{\max} = 3; \quad \vec{x}_{\max} = (0; 3t; 0; 3-3t; 5-3t),\ t \in [0, 1].$

100. $f_{\max} = +\infty.$

101. $f_{\max} = 12; \quad \vec{x}_{\max} = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}t; 2+2t; 0; 4t; 4+8t\right),\ t \in [0, 1].$

102. $f_{\min} = -4; \quad \vec{x}_{\min} = \left(9t+5; \frac{3}{2} + \frac{3}{2}t; 3t; 3-3t; 0\right),\ t \in [0, 1].$

103. *Указание*. Доказательство провести на числовом примере.

104. $f_{\min} = -\infty.$

105. $f_{\max} = 4,\ \vec{x}_{\max} = \left(3t; \frac{5}{2} - \frac{3}{2}t; 0; \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t\right),\ t \in [0, 1].$

106. $f_{\min} = -20; \quad \vec{x}_{\min} = (2+4t; 3+t; 0; 7-7t; 7t),\ t \in [0, 1].$

107. Решений нет; система ограничений несовместна.

108. $f_{\max} = 15; \quad \vec{x}_{\max} = (3; 6; 11; 0; 0; 18).$

109. $f_{\max} = +\infty.$

110. Решений нет; система ограничений несовместна.

111. а) $f_{\min} = -4, \vec{x}_{\min} = (1; 0; 0)$; **б)** $f_{\min} = 21, \vec{x}_{\min} = \left(0; \frac{3}{7}; \frac{4}{7}\right)$;

в) $f_{\min} = 12, \vec{x}_{\min} = \left(\frac{6}{7}; \frac{1}{7}; 0\right)$; **г)** $f_{\min} = 27, \vec{x}_{\min} = \left(0; \frac{9}{32}; \frac{19}{32}\right)$.

112. а) $f_{\max} = -\frac{29}{2}, \vec{x}_{\max} = \left(3; 0; 0; \frac{1}{2}\right)$; **б)** $f_{\min} = 15, \vec{x}_{\min} = \left(0; \frac{3}{8}; \frac{7}{8}; 0\right)$;

в) $f_{\min} = 10, \vec{x}_{\min} = (t; t+1; 0; 0), t \geq 0$; **г)** двойственная задача не имеет допустимых решений; $f_{\max} = +\infty$.

113. Второе; но не первое: точка $(-1; 2)$ обращает в равенства оба неравенства системы, но $5 \cdot (-1) + 8 \cdot 2 = 11 \geq 10$.

114. Да, поскольку $(x - 2y + 3z) + 2(2x + y + z) + 3(-3x + 5y - 7z) =$
$= -4x + 15y - 16z \leq 0$.

115. $a \geq 21$.

117. $f_{\max} = \frac{5}{2}, \vec{x}_{\max} = \left(\frac{17}{6}; 0; \frac{5}{6}; 0; 1\right)$.

118. $f_{\max} = 3,\ \vec{x}_{\max} = \left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

119. $f_{\max} = \frac{32}{5}$, $\vec{x}_{\max} = \left(\frac{16}{5}; \frac{6}{5}\right)$, $\varphi_{\min} = \frac{32}{5}$, $\vec{y}_{\min} = \left(0; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

120. $f_{\min} = 3$, $\vec{x}_{\min} = (2; 1)$.

122. $f_{\max} = 4$, $\vec{x}_{\max} = \left(3t; \frac{5}{2} - \frac{3}{2}t; 0; \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t\right)$, $t \in [0, 1]$.

123. а) $X = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{0} & 0 & 160 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \\ 80 & 0 & 60 & 40 \end{pmatrix}$; **б)** $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 20 \\ 80 & 0 & \boxed{0} & 60 \end{pmatrix}$;

в) $X = \begin{pmatrix} 80 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 40 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 160 \end{pmatrix}$.

124. а) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 20 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 100 & 10 \end{pmatrix}$, $f\left(X^*\right) = 2530$;

б) $X^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 100 \\ 20 & 70 & 0 & 30 \end{pmatrix}$, $f\left(X^*\right) = 2990$;

в) $X^* = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 20 & 70 & 50 \\ 0 & 70 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f\left(X^*\right) = 4060$;

г) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 100 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 100 & 40 \end{pmatrix}$, $f\left(X^*\right) = 4720$.

125. *Решение*. Да, верно. Пусть $X^* = (x_{ij}^*)$ $(i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,n})$ есть оптимальное решение. Следовательно, оно допустимое, то есть $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* = a_i$ $(i = \overline{1,m})$ и $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* = b_j$ $(j = \overline{1,n})$. Просуммируем первое равенство по i, а второе – по j:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* = \sum_{i=1}^{m} a_i \text{ и } \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Поскольку левые части этих выражений равны, то равны и их правые части.

Пример неразрешимой задачи – $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \vec{a} = (5;3), \vec{b} = (2;4).$

126. *Решение*. По условию $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M$. Проверим, что $x_{ij}^* = \dfrac{a_i b_j}{M}$ – допустимое решение:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* = \frac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{M} = \frac{a_i M}{M} = a_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* = \frac{b_j \sum_{i=1}^{m} a_i}{M} = \frac{b_j M}{M} = b_j .$$

Поскольку $x_{ij}^* \ge 0$, то x_{ij}^* является допустимым решением.

127. *Решение*. Множество решений любой совместной системы линейных неравенств – выпуклый многогранник. Докажем его ограниченность.

Рассмотрим ограничение $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = \overline{1,m})$. В силу неотрицательности x_{ij} и a_i для всех x_{ij} выполняются неравенства: $0 \le x_{ij} \le a_i (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$. Следовательно, множество решений системы ограничений транспортной является ограниченным.

128. *Указание*. Воспользоваться предыдущими упражнениями и теоремой Вейерштрасса.

129. Доказательство. Исходная задача имеет вид

$$\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} = a_i, i = 1,2, \\ x_{1j} + x_{2j} = b_j, \ j = 1,2,3, \end{cases}$$

$$f(x) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} \to \min .$$

Значит, двойственная задача имеет вид

$$\varphi(u,v) = a_1u_1 + a_2u_2 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 \to \max$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \quad (*) .$$

По второй теореме двойственности: если ограничение (*) является строгим, то $x_{ij} = 0$, если же ограничение превращается в равенство, то $x_{ij} > 0$.

130. а) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 80 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \\ 90 & 0 & 30 & 50 \end{pmatrix}$, $f\left(X^*\right) = 3380;$

б) $X^* = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 35 \\ 75 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f\left(X^*\right) = 780;$

в) $X^* = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 115 \\ 0 & 70 & 20 & 0 \end{pmatrix}$, $f\left(X^*\right) = 1750;$

г) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 & 50 \\ 0 & 65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 85 & 45 \end{pmatrix}$, $f\left(X^*\right) = 1535.$

131. а) $X^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 90 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 70 & 10 & 0 & 120 \end{pmatrix}$, $f\left(X^*\right) = 2430;$

б) $X^* = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 70 \\ 0 & 90 & 0 & 0 \\ 65 & 0 & 80 & 35 \end{pmatrix}$, $f\left(X^*\right) = 4315;$

в) $X^* = \begin{pmatrix} 75 & 35 & 40 & 0 \\ 0 & 110 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 60 \end{pmatrix}$, $f\left(X^*\right) = 3145.$

Указание. 1) Пусть перевозки из определенного пункта отправления A_i, в пункт назначения B_j, не могут быть осуществлены. Предположим, что тариф перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j является сколь угодно большой величиной M, и при этом условии находят решение новой транспортной задачи. 2) Пусть из A_i в B_j требуется обязательно перевести a_{ij} единиц груза. Тогда в клетку таблицы (i, j) записывают указанное число a_{ij} и в дальнейшем эту клетку считают свободной со сколь угодно большим тарифом перевозок M. Для полученной таким образом новой транспортной задачи находят оптимальное решение. 3) Пусть из A_i в B_j должно быть завезено не менее заданного количества груза a_{ij}. Для определения оптимального решения такой задачи считают, что запасы пункта A_i, и потребности пункта B_j меньше фактических на aij единиц. После этого находят оптимальный план новой транспортной задачи, на основании которого и определяют решение исходной задачи. 4) Пусть из A_i в B_j перевозится не более чем a_{ij} единиц груза, т.е. $x_{ij} \le a_{ij}$. Тогда в таблице исходных данных задачи для каждого j-го ограничения $x_{ij} \le a_{ij}$ предусматривают дополнительный столбец, т.е. вводят дополнительный пункт назначения. В данном столбце записывают те же тарифы, что и в столбце B_j за исключением тарифа, находящегося в i-й строке. В дополнительном столбце в этой строке тариф считают равным некоторому сколь угодно большому числу M. При этом потребности пункта B_j, считают равными a_{ij}, а потребности вновь введенного пункта назначения полагают равными $b_j - a_{ij}$. Решение полученной транспортной задачи может быть найдено методом потенциалов, и тем самым будет определено оптимальное решение или установлена неразрешимость исходной задачи. Подчеркнем, что исходная транспортная задача разрешима лишь в том случае, когда для нее существует хотя бы одно опорное решение.

132. $X^* = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 \\ 30 & 0 & 30 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 2000.$

Указание. Найти оптимальное решение транспортной задачи с таблицей

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	10	15	25	40
A_2	20	30	30	60
b_j	50	20	30	

133. $X^* = \begin{pmatrix} 150 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 50 & 100 & 50 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 300 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 2250.$