ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Ответы к упражнениям гл. 1

1.

f	n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
$5x^4 - 3x^3 + 4x + 1$	4	5	– 3	0	4	1
x^3	3	1	0	0	0	
7	0	7				

2. **а)** $a_n = (-1)^n$, $a_0 = 1$; **б)** $a_n = (-1)^n \cdot n!$, $a_0 = 1$.

3. Старшие коэффициенты многочленов $f + g$ и f совпадают; верно равенство: $\left(x^3 + x + 1\right) + \left(-x^3 + x\right) = 2x + 1$.

4. **а)** 100; **б)** n, если $n -$ четное и $n - 1$, если $n -$ нечетное или $\begin{cases} n, n \in 2\mathrm{N} \\ n-1, n \in 2\mathrm{N}-1 \end{cases}$ или $2 \cdot \left[\dfrac{n}{2}\right]$.

5. **а)** $a = 0, b = 1$; **б)** $a = 2, b = 3$.

6. **а)** $g = fp, h = gq \Rightarrow h = f(pq)$; **г)** $f = c\left(c^{-1}f\right) = c^{-1}(cf)$.

7. Да, так как сумма и разность многочленов, кратных h, делится на h.

8. **а)** $1, x, 5x, 3x^2$; **б)** $3, x-1, x^2+x+1, 7\left(x^2+x+1\right)$;

в) $4, x-2, 5(x-3), x^2-5x+6$; **г)** $2, x-1, x+1, x^2-1, x^2+1$.

9. Если f и g делят друг друга, то для подходящих многочленов p, q верно $f = pg, g = fq$. Откуда старшие коэффициенты многочленов p, q равны 1 и $f = fpq$, значит, $pq = 1$. Сравнивая степени, получаем $\deg p = 0$, $p = 1$. Стало быть, $f = g$.

10. **а)** $q = x^2 + 1, r = 2x + 1$; **б)** $q = x^2 - x + 1, r = x + 1$;

в) $q = x^3 + x + 1, r = -2$; **г)** $q = x^3 - 3x + 1, r = 0$.

11. **а)** $f(2) = 33, f(3) = 115, f(-2) = 25, f(-3) = 103, f(-4) = 297$;

б) $f(2) = -2, f(-2) = -162, f(3) = 78, f(-3) = -702$.

12. **а)** $1, 2, 3$; **б)** $-3, -2, 2$; **в)** $1, 3$; **г)** $-2, 3$.

13. **а)** $3^{12}+1$; **б)** $5^{37}-1$.

14. **а)** $1, 2, -7$; **б)** $2, -5$; **в)** $2, -3, -5, -7$.

15. **а)** $2, 5$; **б)** $\pm\frac{1}{2}$; **в)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$; **г)** $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 1$.

16. Поскольку $f(1)=-3, f(2)=1$, то на интервале $(1;2)$ обязательно есть корень многочлена f. Этот корень иррационален, поскольку всякий рациональный корень многочлена со старшим коэффициентом 1 является целым, а на интервале $(1;2)$ нет целых чисел.

17. **а)** $-1, 2, -3$; **б)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$; **в)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$; **г)** $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 1$.

18. **а)** Пусть f – многочлен, коэффициенты которого записаны в верхней строке схемы Горнера; тогда фактически требуется найти целые корни уравнения $f(x) = 6$ или $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 11x + 7 = 0$. Единственный целый корень этого уравнения $x=-1$. Значит,

	2	5	7	11	13
–1	2	3	4	7	6

б) *Указание***.** Заметить, что положительных корней уравнение $3x^5 + 13x^4 + 15x^3 + 10x^2 + 17x + 12 = 0$ не имеет, поскольку все его коэффициенты положительны. Отрицательные значения $-2, -4, -6, -12$ также не подходят. Остается только $x=-1$. Тем самым, получаем

	3	13	15	10	17	16
–1	3	10	5	5	12	4

19. **а)** 2; **б)** -2; **в)** ± 2; **г)** ± 2. *Указание*. Если k – целый корень многочлена f, то по дополнительной теореме $k-1$ делит $f(1)$, $k+1$ делит $f(-1)$. Вычислить значения $f(\pm 1), f(\pm 2)$; понять, что $\pm 4, \pm 8$ не подходят по дополнительной теореме.

20. Пусть рациональное число p/q, где p/q – несократимая дробь, является корнем многочлена $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами. Это означает, что выполняются равенства

$f(p/q) = a_0(p/q)^n + a_1(p/q)^{n-1} + ... + a_{n-1}(p/q) + a_n = 0,$
$a_0(p^n/q^n) + a_1(p^{n-1}/q^{n-1}) + a_{n-1}(p/q) + a_n = 0,$
откуда после приведения к общему знаменателю получим
$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + ... + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0.$
Полученное равенство можно переписать в виде
$a_0p^n = -q(a_1p^{n-1} + ... + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1}),$
откуда следует, что a_0p^n делится на q. Так как дробь p/q несократима, то числа p и q не имеют общих простых делителей, а тогда числа p^n и q также не имеют общих простых делителей. Поэтому a_0 делится на q, что и требовалось доказать. Точно так же доказывается, что a_n делится на p.

21. **а)** $a=1;$ **б)** $a=-1.$

22. **а)** $x^4-x^3-x^2-x-2;$ **б)** $x^4+x^3+x^2+x+1;$
в) $x^5-5x^4+6x^3-x^2+5x-6;$ **г)** $x^5+3x^4+5x^3+10x^2+9x+2.$

23. *Указание*. Каждое из уравнений имеет корень $x=1$.
а) $x_1=1, x_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2};$ **б)** $x_1=1, x_{2,3}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2};$
в) $x_1=1, x_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4};$ **г)** $x_1=1, x_{2,3}=\dfrac{3\pm\sqrt{57}}{4}.$

24. *Указание*. Найти сначала рациональный корень многочлена.
а) $f=(x+1)(x-2)(x+3);$ **б)** $f=(2x-1)(3x-1)(6x-1);$
в) $f=(2x+1)(x^2-4x+6);$ **г)** $f=(3x-1)(x^2+2x+3).$

25. **а)** $f(x)=(x-1)^4+2(x-1)^3+3(x-1)^2+3;$
б) $f(x)=(x-2)^4+6(x-2)^3+15(x-2)^2+16(x-2)+9;$
в) $f(x)=(x+1)^4-6(x+1)^3+15(x+1)^2-20(x+1)+15;$
г) $f(x)=(x+2)^4-10(x+2)^3+39(x+2)^2-72(x+2)+57.$

26. *Указание*. **а)** Провести индукцию по степени многочлена; **б)** Найти размерность пространства $\mathrm{R}_n[x]$.

27. В левой части равенства указан многочлен, имеющий нулевые коэффициенты при x^2 и x.

28. **а)** Определитель – линейный многочлен, имеющий корень $x=1$, поскольку при этом значении первый столбец равен сумме второго и третьего столбцов; **б)** Определитель – квадратный многочлен, имеющий корни $x=1, x=-3$, поскольку при этих значениях первый и второй (третий) столбцы пропорциональны; **в)** Определитель – квадратный многочлен, имеющий корни $x=4, x=3,$ поскольку при $x=4$ четвертая строка равна сумме второй и третьей строк, а при $x=3$ третий столбец равен сумме первых двух.

29. **а)** $f=x^2+2x+3.$ Пусть $f=ax^2+bx+c.$ Тогда коэффициенты многочлена удовлетворяют системе линейных уравнений: $a-b+c=2, c=3, a+b+c=6,$ решением которой является набор $(1;2;3)$. **б)** $f=3x^2+4x+5.$

30. *Указание*. **а)** Рассмотрим многочлен
$f(x)=(x+b+c)(xb+xc+ab)-xbc.$
Он имеет корень $x=-b,$ значит, по Теореме Безу делится на $(x+b),$ т.е. существует многочлен $g(x)$ над $\mathbf{Z}$ такой, что $f(x)=(x+b)\cdot g(x).$ Подставляя $x=a,$ получим
$f(a)=(a+b)\cdot g(a).$
б) При $a=b$ выражение обращается в нуль.

31. *Указание*. Проверить, что пары многочленов $\{f,g\}$ и $\{f,g-fh\}$ имеют одни и те же общие делители.

32. Пусть $(f,g)=1.$ По теореме о линейном представлении НОД для некоторых многочленов u,v выполняется равенство $fu+gv=1.$ Умножив это равенство на $h,$ получим $(fh)u+(gh)v=h.$ **а)** Так как все слагаемые в левой части делятся на g, то и h на g. **б)** Если h делится на f и на g, то fh делится на fg и gh делится на fg, и значит, левая часть равенства $(fh)u+(gh)v=h$ делится на $fg,$ откуда следует, что h делится на fg.

33. **а)** Если $d=(fh,gh),$ то d делится на $h.$ С другой стороны, многочлены fh и gh оба делятся на d, а тогда и $h=(fh)u+(gh)v$ делится на d. Поэтому $h=d$. **б)** Положим $s=(f,gh), t=(f,h).$ Тогда f и gh делятся на s, и, следовательно, $h=f(hu)+(gh)v$ делится на $s,$ так что $t=(f,h)$ делится на s. С другой стороны, f делится на $t,$ а gh делится на

h, а значит, и на любой его делитель, в частности на t. Поскольку f также делится на t, то и s делится на t.

34. *Указание*. Применить предыдущую задачу.

35. Дробь $\frac{p}{q}$ – сократима на некоторый многочлен положительной степени тогда и только тогда, когда НОД(p, q) имеет положительную степень. Поскольку $(f + x, f^2 + x^2) = (f + x, f^2 + x^2 - (f^2 - x^2)) = (f + x, 2x^2)$, то дробь $\frac{f+x}{f^2+x^2}$ сократима только, если $f+x$ делится на x, но это возможно только в случае, если f делится на x, или $f(0) = 0$.

36. *Указание*. Воспользоваться равенством $(fh, gh) = (f, g)h$. **г)** Многочлены $x^2 + 2x + 3$ и $(x + 1)(x + 2)$ взаимно просты, в противном случае они имели бы общий делитель первой степени, а его корень был бы корнем обоих многочленов, однако первый из них не имеет корней.

37. *Указание*. Подобрав корень, выделить линейный множитель. **а)** $d = x-1$; **б)** $d = x+1$;; **в)** $d=(x+1)(x+2)$;
г) $d = x^2+3x+4$, поскольку $f=(x+1)d$, $g=(x+2)d$.

38. **а)** $x - 1 = (x^4 - 1) - x(x^3 - 1)$; **б)** $x^2 - 1 = (x^8 - 1) - (x^6 - 1)x^2$; **в)** $1 = x^5x - (x^6 - 1)$; **г)** $1 = -x^2 \cdot x^6 + (x^8 + 1)$.

39. **а)** $2(x + 2)(x + 3) = f - g$; **б)** $f = (x^2 - 1)(x - 2)$, $g = (x^2 - 1)(x - 1)$. Умножая обе части равенства $-(x - 2) + (x - 1) = 1$ на $x^2 - 1$, получаем $-f + g = x^2 - 1$ и $(f, g) = x^2 - 1$.

40. Пусть f – многочлен степени $n \geq 1$ со старшим коэффициентом a_0. Так как каждый многочлен имеет конечное число корней, то существуют числа b_1, ..., b_n, не являющиеся его корнями. Положим $g = b_0(x - b_1)...(x - b_n)$, где $b_0 \neq a_0$. Каждый делитель (положительной степени) многочлена g является произведением многочленов вида $x - b_k$, а многочлен f по теореме Безу на такие многочлены не делится. Следовательно, $(f, g) = 1$, а тогда $(g, f - g) = (f, g) = 1$ и $f = g + (f - g)$ – сумма взаимно простых многочленов той же степени, что и f.

41. **а)** $18+i$; **б)** $-37+29i$; **в)** 10; **г)** -17.

42. $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$, $z\cdot\overline{z}=\operatorname{Re}(z)^2+\operatorname{Im}(z)^2$, $z-\overline{z}=2\operatorname{Im}(z)i$.

43. **а)** $1-i$; **б)** $\dfrac{3+i}{5}$; **в)** $\dfrac{4+3i}{5}$; **г)** i.

44. **а)** $z=1+i,\, w=2+i$; **б)** $z=1-2i,\, w=-2+i$.

45. **а)** $1+i,\ 2-i$; **б)** $2+i,\ 3-i$; **в)** $2i-1, 3-i$; **г)** $2+i, 1-3i$.

46. **а)** $\pm1, \pm i$; **б)** $-1, \omega, \overline{\omega}$, где $\omega=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$;

в) $\pm1, \pm\omega, \pm\overline{\omega}$; **г)** $-1, \omega, \overline{\omega}, \pm i$.

47.

48. **а)** 0; **б)** π; **в)** $\dfrac{\pi}{2}$ или $-\dfrac{\pi}{2}$.

49. **а)** $\left|-1-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2,\ 2\cos\dfrac{4\pi}{3}=-2\cos\dfrac{\pi}{3}=-1,$

$2\sin\dfrac{4\pi}{3}=-2\sin\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$;

б) $\left|\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2,\ 2\cos\dfrac{11\pi}{6}=2\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3},$

$2\sin\dfrac{11\pi}{6}=-2\sin\dfrac{\pi}{6}=-1.$

50. **а)** $2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$; **б)** $4\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$;

в) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$; **г)** $2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$.

51. **а)** $4096(1+i)$; **б)** -2^{15}; **в)** $512\left(1-i\sqrt{3}\right)$.

52. **а)** $\pm2, \pm2i, \pm\sqrt{2}(1+i), \pm\sqrt{2}(1-i)$; **б)** $3, \dfrac{3\left(-1\pm i\sqrt{3}\right)}{2}$;

в) $\sqrt{2}(\pm1\pm i)$; **г)** $-i, \dfrac{i\pm\sqrt{3}}{2}$.

53. **а)** *Указание*. Воспользоваться основной теоремой.
б) $a=-6, b=11, c=-6$.

54. *Указание*. Воспользоваться теоремой Безу.

55. x^2-4x+5.

56. **а)** Нет; **б)** нет.

57. **а)** $z=1$ кратности 3, $z=2$ кратности 2, $z=3$ простой корень;

б) $z=2$ кратности 3, $z=5$ простой корень; **в)** $z=1$ кратности 2, $z=2$ и $z=3$ простые корни; **г)** $z_k=\cos\frac{2\pi k}{7}+i\sin\frac{2\pi k}{7}\left(k=\overline{0,6}\right)$ простые корни.

58. **а)** $f(z)=(2z-1)(3z-1)(4z-1)$; **б)** $f(z)=(3z-1)(2z-i)(2z+i)$.

59. Никакой. *Указание*. **а)** многочлен не имеет рациональных корней, поскольку $\sqrt[100]{50}$ иррациональное число; **б)** многочлен имеет единственный рациональный корень $x=0$, но отличен от x^{14}; **в)** $2x^3-x^2+2x-1=(2x-1)(x^{12}+1)$; **г)** многочлен имеет единственный рациональный корень $x=1$ и не совпадает с $(x-1)^{13}$.

60. **а)** $z^5-9z^4+31z^3-51z^2+40z-12$;

б) $z^6-6z^5+19z^4-36z^3+43z^2-30z+25$.

61. **а)** $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}$; **б)** $\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-1}$; **в)** $\frac{3}{x+1}-\frac{4}{x+2}+\frac{4}{x+3}$;

г) $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-3}$.

62. **а)** $\frac{1}{(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{3}{(x-2)^3}+\frac{4}{(x-2)^4}$; **б)** $\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{x+2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$;

в) $\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}$; **г)** $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}$.

Ответы к упражнениям гл. 2

63. *Указание*. Проверить свойства аддитивности и однородности. Например, проверим аддитивность в **б).** Пусть

$\vec{a}=(a_1,a_2), \vec{b}=(b_1,b_2)$; тогда для $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ имеем

$f\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=f\left(\vec{c}\right)=(c_1+c_2,\,c_1+2c_2)$,

$f\left(\vec{a}\right)+f\left(\vec{b}\right)=(a_1+a_2,\,a_1+2a_2)+(b_1+b_2,\,b_1+2b_2)=$

$=(c_1+c_2,\,c_1+2c_2)$.

64. **а)**, **б)** Если $\vec{x}\neq\vec{0}$, то $f\left(2\vec{x}\right)\neq 2f\left(\vec{x}\right)$;

в) $f\left(\vec{0}\right)=(1;\,2;\,3)\neq\vec{0}$.

65. *Решение*. Так как столбцы матрицы – координаты векторов $f(\vec{e}_j)$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, то при перестановке векторов базиса меняются первые два столбца и первые две строки матрицы.

66. **а)** $\mathrm{Ker} f = \{t(1,1), t \in \mathbf{R}\}$, $\mathrm{Im}\, f = \{t(1,0), t \in \mathbf{R}\}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\mathrm{Ker} f = \{t(-1,1), t \in \mathbf{R}\}$, $\mathrm{Im} f = \{t(1,1), t \in \mathbf{R}\}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\mathrm{Ker} f = \{t(-3,0,1), t \in \mathbf{R}\}$, $\mathrm{Im} f = \{s(0,1,1) + t(0,0,1), s, t \in \mathbf{R}\}$,
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. **в)** Действие преобразования на вектор в координатах имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения ядра надо решить систему

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$ решение которой имеет вид $\{x_1 = -3x_3,\ x_2 = 0\}$, т.е. одномерно. Для нахождения образа необходимо решить систему уравнений с параметрами:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{cases} 0 = a, \\ x_2 = b, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = c. \end{cases}$$

Более точно, нас интересуют значения параметров, при которых система совместна. Это так для $a = 0$ и произвольных b, c, значит, образ двумерен.

67. Преобразования линейны. **а)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Ker} f = 0$, $\mathrm{Im} f = \mathbf{C}$;

б) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Ker}f = 0$, $\mathrm{Im}f = \mathbf{C}$.

68. **а)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 36 & 60 \\ -21 & -35 \end{pmatrix}$.

69. $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. *Решение.* $(E') = f(E) = (E)F$,

$(E'') = g(E') = (E')G = (E)FG$, где $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Значит, матрица искомого преобразования равна FG:

$FG = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

70. $f(\vec{x}) = (13; -25)$. *Решение.* Заметим, что $\vec{x} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$. Значит, $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ – координатный столбец вектора $\vec{x}$ относительно базиса E, стало быть, координаты образа $f(\vec{x})$ относительно стандартного базиса можно найти с помощью матриц: $PA \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -25 \end{pmatrix}$, где $P = E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Таким образом, $f(\vec{x}) = (13; -25)$.

71. **а)** $A = S^{-1}BS \Leftrightarrow (S^{-1})^{-1} AS^{-1} = B$;

б) $A = S^{-1}BS, B = T^{-1}CT \Rightarrow$

$A = S^{-1}(T^{-1}CT)S = (S^{-1}T^{-1})C(TS) = (TS)^{-1} C(TS)$.

72. *Решение.* E – стандартный (ортонормированный) базис, состоящий из векторов $\vec{e}_1 = (1;0), \vec{e}_2 = (0;1)$. Поскольку E – ортонормированный базис, то ортогональность преобразования f равносильна ортогональности матрицы $A_f(E)$. Заметим, что $A_f(B) = B^{-1}A_f(E)B$, откуда $A_f(E) = BA_f(B)B^{-1}$. Вычислим $B_iA_jB_i^{-1}$ для возможных наборов (i,j): $B_1A_1B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$B_1A_2B_1^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B_1A_3B_1^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix};\quad B_2A_1B_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$B_2A_2B_2^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad B_2A_3B_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix};\quad B_3A_1B_3^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$B_3A_2B_3^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 8\\ -3 & 5\end{pmatrix},\ B_3A_3B_3^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\ \text{При } i=j.$$

73. *Решение.* $E-$стандартный базис, состоящий из векторов $\vec{e}_1=(1;0), \vec{e}_2=(0;1)$. Поскольку $E-$ ортонормированный базис, то симметричность преобразования f равносильна симметричности матрицы $A_f(E)$. Заметим также, что $A_f(B)=B^{-1}A_f(E)B$, откуда $A_f(E)=BA_f(B)B^{-1}$. Вычислим $B_iA_jB_i^{-1}$ для возможных наборов (i,j): $B_1A_1B_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$,

$$B_1A_2B_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\quad B_1A_3B_1^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 6 & 3\end{pmatrix};\quad B_2A_1B_2^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$B_2A_2B_2^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad B_2A_3B_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 10 & 3\end{pmatrix};\quad B_3A_1B_3^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix},$$

$$B_3A_2B_3^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 8\\ -3 & 7\end{pmatrix},\ B_3A_3B_3^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.\ \text{При } i=j.$$

74. $f(\lambda)$.

75. **а)** $\lambda_1=3, \vec{x}=a(1;-1)^{\mathrm{T}}; \lambda_2=5, \vec{x}=a(1;1)^{\mathrm{T}}; a\neq 0;$

б) $\lambda_1=-1, \vec{x}=a(-4;1)^{\mathrm{T}}; \lambda_2=4, \vec{x}=a(1;1)^{\mathrm{T}}; a\neq 0;$

в) $\lambda_1=-1, \vec{x}=a(1;-1)^{\mathrm{T}}; \lambda_2=3, \vec{x}=a(1;1)^{\mathrm{T}}; a\neq 0;$

г) $\lambda_1=2, \vec{x}=a(2;1)^{\mathrm{T}}; \lambda_2=3, \vec{x}=a(1;1)^{\mathrm{T}}; a\neq 0.$

76. *Указание*. Однородная система линейных уравнений $(A-\lambda E)X=0$ имеет ненулевое решение $\Leftrightarrow$ $|A-\lambda E|=0$ $\Leftrightarrow$ $\lambda-$собственное значение матрицы A.

77. **а)** $(-1)^n$, **б)** $(-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)$; **в)** $|A|$.

78. **а)** $X^3-6X^2+11X-6; \lambda_i=i, a\vec{e}_i\ (i=1,2,3), a\neq 0;$

б) $X^3-2X^2-X+2;$

$\lambda_1=-1, a(\vec{e}_1-\vec{e}_2); \lambda_2=1, a(\vec{e}_1+\vec{e}_2); \lambda_3=2, a\vec{e}_3,\ a\neq 0;$

в) $X^3-10X^2+33X-36;\ \lambda_1=3, a\overset{\mathrm{r}}{e}_1;\ \lambda_2=4, a\left(4;1;1\right)^{\mathrm{T}}, a\neq 0;$

г) $X^3-6X^2+12X-8;\ \lambda_1=2, a\overset{\mathrm{r}}{e}_1, a\neq 0.$

79. Характеристическое уравнение каждой из указанных матриц имеет вид $\lambda^3-12\lambda^2+45\lambda-54=0;$ корни $-\lambda_{1,2}=3$ и $\lambda_3=6.$ Наибольшее собственное значение 6. Собственные векторы, отвечающие значению 6: **а)** $a\left(\ 2;-1;1\right)^T, a\neq 0;$

б) $a\left(\ 0;1;-2;\right)^T, a\neq 0;$ **в)** $a\left(\ 6;1;-2;\right)^T, a\neq 0;$

г) $a\left(\ -38;-5;16;\right)^T, a\neq 0.$

80. **а)** Если $AX_1=\lambda X_1, AX_2=\lambda X_2,$ то выполнены равенства
$A\left(X_1+X_2\right)=AX_1+AX_2=\lambda X_1+\lambda X_2=\lambda\left(X_1+X_2\right),$
$A\left(aX_1\right)=a\left(AX_1\right)==a\lambda X_1=\lambda\left(aX_1\right);$

б) $V_3=\left\{a\left(9;2;-4\right)^{\mathrm{T}}\middle|a\in\mathrm{R}\right\}, V_6=\left\{a\left(42;11;-16\right)^{\mathrm{T}}\middle|a\in\mathrm{R}\right\}.$

81. **а)** Да; **б)** нет; **в)** да; **г)** нет. В пунктах **а), в)** собственные значения $-1, 0, 2;$ в пунктах **б), г)** единственное собственное значение 3, а подпространство $V_3=\left\{X\in\mathrm{R}^3 : AX=3X\right\},$ имеет размерность 2 и 1 соответственно.

82. $22, 31, 38.$

83. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1;1\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1;1\right)$ – ортонормированный базис, канонический вид: **а)** $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}a-b & 0\\ 0 & a+b\end{pmatrix}.$

84. $C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

85. **а)** $\Phi=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+6x_2x_3;$
б) $\Phi=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3;$
в) $\Phi=2x_1^2+x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3.$

86. **а)** $\Phi=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+6x_2x_3;$
б) $\Phi=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3;$
в) $\Phi=2x_1^2+x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3.$

87. $X = PQZ.$

88. **а)** $\Phi = y_1^2 + 5y_2^2,\ C = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

б) $\Phi = -y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2,\ C = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$

89. **а)** $\hat{\mathrm{O}} = \left(x_1 + x_3\right)^2 + x_2^2 + x_3^2;$

б) $\hat{\mathrm{O}} = \left(x_1 + x_3\right)^2 + \left(x_2 + x_3\right)^2 + x_3^2;$

в) $\hat{\mathrm{O}} = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - \left(x_2 + x_3\right)^2 + x_3^2;$

г) $\hat{\mathrm{O}} = \left(x_1 + x_2 + 2x_3\right)^2 - \left(x_2 + 2x_3\right)^2 + x_3^2.$

90. **а)** $\Phi_1, \Phi_2;$ **б)** $\Phi_1, \Phi_3.$

91. $\Phi_1 = x_1^2 + x_2^2,\ \Phi_2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2.$

92.

93. **а)** $\lambda > 2;$ **б)** $\varnothing;$ **в)** $0 < \lambda < \dfrac{4}{3};$ **г)** $-\dfrac{4}{5} < \lambda < 0.$

94. **а)** Да; **б)** нет.

Ответы к упражнениям гл. 3

95. $\lambda_A = 5,\ \vec{x}_A = t\left(1; 2; 3\right)^T,\ t > 0.$

96. **а)** $\lambda_A = 7;$ **б)** $\lambda_A = 5;$ **в)** $\lambda_A = 9.$

97. **а)** $3, t\left(1; 0; 0\right), t > 0;$ **б)** $2, t\left(1; 1; 0\right), t > 0;$

в) $2, t\left(0; 0; 1\right), t > 0;$ **г)** $6, t\left(4; 4; 5\right), t > 0.$

98. $A = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 1{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}1 \end{pmatrix},\ X = \left(103{,}23; 56{,}45\right).$

99. $X = \left(135{,}7; 69{,}38; 81{,}38\right).$

100. $A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$

101. **а)** $X = \left(190; 120\right);$ **б)** 15,79%; 33,33%.

102. **а)** $\vec{p} = \left(17{,}9; 10{,}2; 16{,}58\right);$ **б)** 8,72%, 3,82%, 3,32%.

103. **а)** A продуктивна; **б)** A не продуктивна; **в)** A продуктивна.

104. *Указание.* **а)** Сумма *элементов* каждого столбца меньше единицы; **б)** Сумма элементов в каждой строке меньше 1.

105. $a < \frac{1}{6}.$

106. **а)** $\alpha < 49 - 20\sqrt{6} \approx 0,0102$; **б)** $\alpha = \frac{7}{3} \approx 2,3333.$

Ответы к упражнениям гл. 4

107. *Ответ.* **а)** $x_n = C_1 + C_2(-3)^n$; **б)** $x_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n (C_1 + C_2 n)$;

в) $x_n = \left(\sqrt{13}\right)^n \left(C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi\right), \varphi = arctg\frac{2}{3}.$

108. **а)** $x_n^* = -9 \cdot 3^n$; **б)** $x_n^* = -2^{n-1}$; **в)** $x_n^* = 5$;

г) $x_n^* = \frac{4\pi^2}{1-2\pi-3\pi^2}\pi^{-n}$; частное решение будем искать в виде $x_n^* = C\pi^{-n}$. Подставим в исходное уравнение $C\pi^{-n-2} - 2C\pi^{-n-1} - 3C\pi^{-n} = 4\pi^{-n}$, вынесем общий множитель за скобку $C\pi^{-n-2}(1-2\pi-3\pi^2) = 4\pi^{-n}$, откуда найдем число $C = \frac{4\pi^2}{1-2\pi-3\pi^2}$.

109. *Решение.* Характеристическое уравнение имеет корень равный 1, кратность которого равна 2, значит, общее решение однородного уравнения имеет вид $x_n = C_1 + C_2 n$. Используя начальные условия, получаем систему: $\begin{cases} a = C_1 + C_2, \\ a + d = C_1 + 2C_2. \end{cases}$

Решением системы является пара $C_1 = a - d, C_2 = d$. Откуда получаем, что общее решение имеет требуемый вид.

110. *Указание.* Положить $y_n = \log_q x_n, n = 1,2,...$ Тогда y_n – арифметическая прогрессия и достаточно воспользоваться ее признаком.

111. *Указание.* Каждый член, начиная с третьего, однозначно вычисляется по двум предыдущим.

112. $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$

113. *Указание.* Подставить вместо неизвестной x_n разность $x_n^{(1)} - x_n^{(2)}$.

114. *Решение.* Если определитель Казоратти отличен о нуля в точке n_0, то пары $\left(x_{n_0}^{(1)}, x_{n_0+1}^{(1)}\right)$ и $\left(x_{n_0}^{(1)}, x_{n_0+1}^{(1)}\right)$ не пропорциональны, значит, не пропорциональны и бесконечные строки $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \mathrm{K}\right)$ и$\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \mathrm{K}\right)$. Но это и означает линейную независимость последовательностей $x_n^{(1)}$ и$x_n^{(2)}$.

115. *Решение.* Имеем $c = (a+V)c - Vc + b$, откуда $c = b(1-a)^{-1}$.

116. **а)** $X_t = 16 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^t \left(\tilde{N}_1 \cos\dfrac{t\pi}{4} + \tilde{N}_2 \sin\dfrac{t\pi}{4}\right), (1-a)^{-1} = 2;$

б) $X_t = 10 + \left(\sqrt{0{,}89}\right)^t \left(C_1 \cos(t\varphi) + C_2 \sin(t\varphi)\right)$, где $\varphi = arctg\, 1{,}6$, $(1-a)^{-1} = 1{,}1236$; **в)** $X_t = 16 + (0{,}5)^t (C_1 + tC_2), (1-a)^{-1} = 4$.

117. **а)** Динамика носит затухающий характер, т.е. вкладывая в инвестиции незначительную часть прироста национального дохода (всего 1%) получаем быстроубывающую величину национального дохода; **б)** динамика носит колебательный характер с постоянной амплитудой; **в)** динамика носит растущий характер.

118. $p^* = \dfrac{a-m}{b+n}.$

119. **а)** $p_t = C_1(-1{,}5)^t + 2$; **б)** $p_t = C_1(-0{,}8)^t + 1$;

в) $p_t = C_1(-1)^t + 3$.

120. $p_t = C\left(-\dfrac{3}{2}\right)^t + 1$; последовательность (p_t) удаляется от равновесного состояния $p^* = 1$.

121. **а)** $p^* = \dfrac{K}{r}$ – стоимость бесконечной ренты;

б) $\dfrac{K}{r} = \dfrac{K}{1+r} + \dfrac{K}{(1+r)^2} + \dfrac{K}{(1+r)^3} + \mathrm{L}$

122. **а)** $X_n = \left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-5} + 2$; **б)** $X_n = \left(\dfrac{6}{5}\right)^{n-3} + 4$.

123. $X_n = \left(F - \frac{K}{r}\right)(1+r)^{n-k} + \frac{K}{r}$. Эта последовательность является возрастающей, только если номинальная стоимость облигации F выше, чем стоимость бесконечной ренты $\frac{K}{r}$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1.1. Основные понятия, связанные с многочленами

124. **а)** $15x^2 + 15x + 35$; **б)** $2x^3 - 6x^2 + 30x - 26$.

125. **а)** $x^8 - 1$; **б)** $x^{1023} + x^{1022} + \ldots + x + 1$. *Указание*. Умножить данный многочлен на $x - 1$, применить нужное число раз формулу разности квадратов и затем воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии $1 + x + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

126. **а)** 0; **б)** -2^{20}; введем обозначения: $f_1 = (x-2)^2$, $f_{k+1} = (f_k - 2)^2$, a_k – коэффициент f_k при x. Свободный член каждого многочлена f_k равен 4; поэтому $f_{k+1} = (\ldots + a_k x + 2)^2 = \ldots + 4a_k x + 4$, так что $a_{k+1} = 4a_k$, и поскольку $a_1 = -4$, то с помощью формулы общего члена геометрической прогрессии получаем $a_{10} = -4^{10} = -2^{20}$.

127. **а)** 1; **б)** 1695.

128. Бесконечно много: **а)** $c \in \mathrm{R}$; **б)** cf, $c \in \mathrm{R}$.

129. Пусть $F = x^n - 2x^{n-1} - 3, G = x^m - 3x^{m-1} + 2, H = x^{n+m} - 5x^{n+m-1} - 6$. Допустим, что степени данных многочленов f, g и неизвестного многочлена h удовлетворяют неравенствам $\deg f \le n-3, \deg g \le m-3, \deg h \le n+m-3$. Пусть, кроме того, $(F + xf)(G + xg) = H + xh$. Если $f = g = 0$, то в качестве h подходит многочлен $h_0 = x^{-1}(FG - H)$. В общем случае, для произвольных f, g, подходит многочлен $h = (Fg + fG + xfg) + h_0$. Таким образом, для любых чисел $a_2, \ldots, a_{n-1}, b_2, \ldots, b_{m-1}$ можно подобрать числа $c_2, \ldots, c_{n+m-1}$ так, что будет верно требуемое равенство.

130. **а)** Не многочлен. Если $\sqrt{x^2+1}=f$ – многочлен степени n, то $x^2 + 1 = f^2$, и, сравнивая степени, имеем $2=2n, n=1$, то есть f – линейный многочлен, и, следовательно, имеет корень. Но многочлен $x^2 + 1$ корней не имеет.

б) Выражение не определено в точке $x = 1$, значит, не многочлен.

в) Поскольку $x^5 + x + 1 = (x^5 + x^4 + x^3) - (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$, и поэтому данная дробь равна $x^3 - x^2 + 1$;

г) Имеем: $\sqrt{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}=\sqrt{(x^2+x+1)^2}=x^2+x+1.$

131. **а)** $q = x^{380} + x^{360} + x^{340} + \ldots + x^{20} + 1$; $r = 0$. Здесь разбиваем слагаемые многочлена f на 20 групп по 20 слагаемых, последнее из которых равно g, предпоследнее равно gx^{20}, затем gx^{40} и т.д.

б) $q = x^5(x^{105} + x^{98} + \ldots +1)$, $r = x^5 - 1$. *Указание*. Прибавить и вычесть x^5: $f = x^5(x^{112} - 1) + x^5 - 1= x^5 ((x^7)^{16} - 1) + x^5 - 1= = x^5(x^7 - 1)(x^{105} + x^{98} +\ldots+ 1) + x^5 - 1$.

132. **а)** Да; **б)** да.

133. Нет, поскольку частное должно иметь целые коэффициенты, но уравнение $3t=7$ не имеет решений в целых числах.

1.2. Схема Горнера и корни многочленов

134. Знакопеременная сумма коэффициентов многочлена $f(x)$ равна $f(-1)$. В данном случае это значение равно 2, а не 1.

135. **а)** $1 = 2(a_n + a_{n-2} +\ldots)$. Противоречие: в левой части стоит нечетное число, а в правой – четное.

б) Допустим, что существует многочлен $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ с целыми коэффициентами a_i такой, что: $f(1)=2, f(3)=5$ (условие $f(2)=3$ в задаче лишнее). Тогда $3 = f(3) - f(1) = a_0(3^n - 1) + a_1(3^{n-1} - 1) +\ldots+ a_{n-1}(3 - 1)$. Получено противоречивое равенство, поскольку число 3 нечетно, а все разности вида 3^n - 1 являются четными числами.

136. **а)** $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$.Заметим, что старший коэффициент уравнения $x^4-7x^3+3x^2-ax-8=0$ равен 1, так что все его рациональные корни – целые и являются делителями числа 8. С другой стороны, если c – целый корень уравнения, то после подстановки его в уравнение получается верное равенство, которое можно рассматривать как уравнение относительно a. Это уравнение всегда имеет решение, поскольку $c\neq 0$. Поэтому всякий делитель числа 8 при некотором a является корнем уравнения. **б)** $\pm 1, \pm 7, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{7}{3}$.

137. **а)** Данное число является корнем уравнения $x^4 - 14x^2 + 9 = 0$, которое не имеет целых решений; **б)** данное число является корнем уравнения $x^4 - 16x^2 + 4 = 0$, которое не имеет целых решений; **в)** данное число является корнем уравнения $x^8 - 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576 = 0$, которое не имеет целых решений.

138. **а)** –2. Если k – целый корень многочлена f, то 26 делится на k, а $f(1) = 123$ делится на $k - 1$. «Большие» делители ±13 и ±23 второму условию не удовлетворяют. **б)** 2. Так как $f(1) = -1$, то $k - 1 = \pm 1$, так что k равно 0 или 2. Поскольку 0, очевидно, не подходит, то остается единственный корень 2.

139. **а)** Если k – целый корень данного многочлена f, то по дополнительной теореме о целых корнях $f(1) = 17$ делится на $k - 1$, а $f(-1) = 13$ делится на $k + 1$. Следовательно, $k - 1 \in \{\pm 1, \pm 17\}$, $k + 1 \in \{\pm 1, \pm 13\}$, то есть $k \in \{2, 0, 18, -16\}$ и одновременно $k \in \{0, -2, 12, -14\}$. Единственное общее для этих множеств число 0 не является корнем уравнения, так что уравнение не имеет целых корней. **б)** Данный многочлен не имеет положительных корней: если $k \geq 1$ – целый корень f, то $f(k) \geq 41 - 40 > 0$. Пусть $k < 0$ – корень f; выпишем в таблицу отрицательные делители числа 40 – в нее входит и число k

–1	–2	–4	–8
–5	–10	–20	–40

и составим еще две таблицы – для первой из них увеличим все делители числа 40 на 1, а для второй – уменьшим на 1:

0	–1	–3	–7
–4	–9	–19	–39

–2	–3	–5	–9
–6	–11	–21	–41

В первой таблице есть число $k + 1$ – делитель числа $f(-1) = -32$, во второй – число $k - 1$ – делитель числа $f(1) = 36$. Поэтому $k + 1$ равно –1 или –4, а значит, k равно –2 или –5. Тогда $k - 1$ равно –3 или –6, и оба этих числа входят во вторую таблицу, так что дополнительная теорема о целых корнях «исчерпала свои возможности». Однако решение легко заканчивается из других соображений: –2 не является корнем данного многочлена, поскольку при $x = -2$ сумма первых трех слагаемых делится на 8, а сумма последних двух слагаемых равна -84, так что на 8 не делится. Точно так же при $x = -5$ сумма первых трех слагаемых делится на 125, а сумма последних двух слагаемых равна -150.

140. Пусть рациональное число p/q, где p/q – несократимая дробь, является корнем многочлена $f = a_0x^n + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Имеем $a_0p^n + a_2p^{n-2}q^2 + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0$.
Допустим, что $q > 1$. Тогда по теореме о рациональных корнях a_0 делится на $q > 1$, значит, $a_0 = q$. Стало быть,
$qp^n + a_2p^{n-2}q^2 + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0$.
Сократив на q, получим $p^n + a_2p^{n-2}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1} = 0$.
Поскольку все слагаемые, начиная со второго делятся на q, то p^n делится на q, что противоречит, предположению о несократимости дроби p/q.

141. **а)** $a = 25$. **б)** Таких чисел нет.

142. Разложим многочлен f по степеням $x - m$:
$f = b_0(x - m)^n + b_1(x - m)^{n-1} + \ldots + b_n$,
где b_i – целые, $b_n = f(m)$. Подставим в это равенство $x = p/q$:
$b_0(p/q - m)^n + b_1(p/q - m)^{n-1} + \ldots + b_n = 0$.
После умножения обеих частей этого равенства на q^n получаем $b_0(p - qm)^n + b_1(p - qm)^{n-1}q + \ldots + b_{n-1}(p - qm)q^{n-1} + b_nq^n = 0$.
Так как все слагаемые, кроме последнего, делятся на $p - qm$, то и b_nq^n также делится на $p - qm$.
Поскольку НОД$(p - qm, q) = =$ НОД$(p, q) = 1$, то $p - qm$ и q^n взаимно просты и, значит, b_n делится на $p - qm$. □

143. **а)** $\frac{1}{2}$; **б)** $-\frac{1}{2}$.

1.3. Теорема Безу и следствия из нее

144. *Указание.* **а)** $(x - a)^2(x^2 + ax + a^2)$. Заметить, что a является корнем многочлена и дважды применить схему Горнера с числом $-a$. Получившийся квадратный трехчлен имеет отрицательный дискриминант и на множители не раскладывается.
б) $(x + a)^2(x^2 - xa + a^2)$. Заметить, что $-a$ является корнем многочлена.
в) $(x - 2a)(x - a)(x + a)(x + 2a)$. Если вынести за скобки множитель a^4 и ввести переменную $t = x/a$, то получится многочлен $a^4(t^4 - 5t^2 + 4) = a^4(t^2 - 1)(t^2 - 4) = a^4(t - 1)(t + 1)(t - 2)(t + 2)$.

г) $(x + a)(x + 2a)(x^2 - ax + a^2)$. Проще всего сгруппировать первые два и последние два слагаемых и затем разложить на множители сумму кубов.

145. **а)** $\frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$, положить $t = 2x$; **б)** $\frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$, умножить обе части уравнения на 2 и положить $t = 2x$; **в)** $\frac{1}{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{3}$, положить $t = 3x$; **г)** $\frac{1}{3}$, положить $t = 9x$.

146. **а)** $\frac{1}{2}, 1$. После раскрытия скобок в левой части получается уравнение $2x^4 - x^3 - 2x + 1 = 0$, имеющее корни 1 и $\frac{1}{2}$.

б) $-1, -\frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Раскрыть скобки и подобрать рациональные корни.

в) $1, 2.$ Скобки в правой части удобно раскрыть с помощью схемы Горнера «снизу-вверх»

	5	11	10	7	3
–1	5	6	4	3	0
–1	5	1	3	0	

После преобразований получится уравнение
$4x^4 - 11x^3 + 8x^2 - 7x + 6 = 0$,
у которого следует подобрать рациональные корни.

г) $-5, -2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. После очевидных преобразований получается следующее уравнение $6x^4 + 37x^3 + 26x^2 - 43x + 10 = 0$.

147. *Указание*. При $c = -(a + b)$ выражения обращаются в нуль.

148. **а)** $W(a,b,c) = (b - a)\cdot(c - a)(c - b)$; **б)** $W(a,b,c,x)$ – кубический многочлен со старшим коэффициентом $W(a,b,c)$, корни которого легко угадать $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c,$ следовательно, $W(a,b,c,d)$ равен $(b - a)\cdot(c - a)(c - b)\cdot(d - a)(d - b)(d - c)$.

149. Будем искать неизвестные коэффициенты многочлена $f(x) = t_0 + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + t_4x^4$. Основной определитель системы линейных уравнений $f(c_k) = b_k$ $(k = 1,...,5)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & c_1^3 \\ 1 & c_2 & c_2^2 & c_2^3 \\ 1 & c_3 & c_3^2 & c_3^3 \\ 1 & c_4 & c_4^2 & c_4^3 \end{vmatrix} = W\left(c_1, c_2, c_3, c_4\right),$$ а, значит, отличен от нуля.

150. **а)** $x^3 - 3x + 1$; **б)** $x^3 + 3x + 1$.

151.

152. **а)** $16 \cdot \dfrac{(x-1)(x-3)}{(-2-1)(-2-3)} + \left(-2\right) \cdot \dfrac{(x+2)(x-3)}{(1+2)(1-3)} +$

$+\left(-4\right) \cdot \dfrac{(x+2)((x-1)}{(3+2)(3-1)} = x^2 - 5x + 2;$

б) $3 \cdot \dfrac{(x+2)(x+3)}{(-1+2)(-1+3)} + 6 \cdot \dfrac{(x+1)(x+3)}{(-2+1)(-2+3)} +$

$+13 \cdot \dfrac{(x+1)(x+2)}{(-3+1)(-3+2)} = 2x^2 + 3x + 4;$

в) $0 \cdot \dfrac{(x+1)x(x-1)}{(-2+1)(-2)(-2-1)} + 1 \cdot \dfrac{(x+2)x(x-1)}{(-1+2)(-1)(-1-1)} +$

$+8 \cdot \dfrac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(0+2)(0+1)(0-1)} + 27 \cdot \dfrac{(x+2)(x+1)x}{(1+2)(1+1)} = x^3 + 6x^2 + 12x + 8;$

г) $\left(-2\right) \cdot \dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 2 \cdot \dfrac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} +$

$+14 \cdot \dfrac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 40 \cdot \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} =$

$= x^3 - 2x^2 + 3x - 4.$

153. Докажем, что корни многочлена находятся на отрезке $\left(0;\, 3\right)$. Действительно, отрицательных корней нет, поскольку если $x = -c \left(c > 0\right)$ корень, то

$f\left(-c\right) = -3c^3 - 18c^2 - 33c - 17 < -17 < 0.$

Далее, разделим f с остатком на $\left(x-3\right)$:

$f = \left(3x^2 - 9x + 6\right)\left(x-3\right) + 1$

0	3	–18	33	–17
3	3	–9	6	1

Поскольку $3x^2 - 9x + 6 = 3x\left(x-3\right) + 6$, то

$f = \left(3x\left(x-3\right) + 6\right)\left(x-3\right) + 1$ и при $x \geq 3$ верно $f\left(x\right) \geq 1$.

Докажем, наконец, что многочлен f не имеет корней на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Допустим противное, т.е. c – корень и $c \le \frac{1}{2}$. Тогда $-c \ge -\frac{1}{2}$ является корнем многочлена $-3x^3 - 18x^2 - 33x - 17$, а, значит многочлен $3x^3 + 18x^2 + 33x + 17$ имеет корень d, больший $-\frac{1}{2}$. Тогда $d = -\frac{1}{2} + t, t \ge 0$. Имеем

$$0 = 8\left(3d^3 + 18d^2 + 33d + 17\right) =$$

$$= 3\left(2d\right)^3 + 36\left(2d\right)^2 + 33 \cdot 4\left(2d\right) + 17 \cdot 8 =$$

$$= 3\left(2t - 1\right)^3 + 36\left(2t - 1\right)^2 + 33 \cdot 4\left(2t - 1\right) + 17 \cdot 8 =$$

$$= 24t^3 + 108t^2 + 138t + 37,$$

противоречие.

1.4. НОД многочленов и алгоритм Евклида

154. Положим $d = \left(f, g\right)h$. Заметим, что по теореме о линейном представлении НОД: $fu + gv = \left(f, g\right)$, откуда $\left(fh\right)u + \left(gh\right)v = d$. Поскольку d делит $\left(fh\right)$ и $\left(gh\right)$, то ввиду примера 4.3 имеем $\left(fh, gh\right) = d$.

155. Положим $d = x^2 + x + 1$. **а)** $\left(f, g\right) = d$, $f - g = \left(f, g\right)$;
б) $\left(f, g\right) = -2d$, $\left(x + 1\right)f - g = \left(f, g\right)$.

156. *Указание*. Дробь $\dfrac{p}{q}$ – сократима на некоторый многочлен положительной степени тогда и только тогда, когда НОД$\left(p, q\right)$ имеет положительную степень.

а) $f(0) = 0$. $(f + x, f^2 + 2x^2) = (f + x, f^2 + 2x^2 - (f^2 - x^2)) =$
$=(f + x, 3x^2)$.

б) $f(0) = 0$. Так как $(f + x, f^4 + x^4) =$
$= (f^4 + x^4, f^4 + x^4 - (f^2 - x^2)(f^2 + x^2)) = (f^4 + x^4, 2x^4)$, то $f(0)=0$.

в) $f(0) = 0$. Ясно, что при $f(0) = 0$ данную дробь можно сократить на x. Далее, имеем:
$(f^2 + x^2, f^3 + x^3) = (f^2 + x^2, f^3 + x^3 - (f^2 + x^2)f) = (f^2 + x^2, x^3 - fx^2)$.
Если $f(0) \ne 0$, то $(f^2 + x^2, x^2) = 1$ и
$(f^2 + x^2, x^3 - fx^2) = (f^2 + x^2, f - x) = (f - x, f^2 + x^2 - (f^2 - x^2)) =$
$= (f - x, 2x^2)$.

Значит, если данная в условии задачи дробь сократима, то ее числитель и знаменатель обязаны делиться на x, т.е. $f(0) = 0$ – противоречие. Итак, мы доказали, что $f(0) = 0$.

г) $f(0) = 0$ или $f(-4) = 8$. Заметим, что

$(f + 2x, f^2 + x^3) == (f + 2x, f^2 + x^3 - (f^2 - 4x^2)) =$

$= (f + 2x, x^3 + 4x^2) = (f + 2x, x^2(x + 4)$.

Значит, дробь сократима тогда и только тогда, когда $f + 2x$ делится на x или на $x + 4$. По теореме Безу это выполняется, если $f + 2x$ обращается в нуль при $x = 0$ или при $x = -4$, т.е. либо $f(0) = 0$, либо $f(-4) = 8$ (дробь можно сократить на $x + 4$).

157. $\left(f_n, f_m\right) = f_{(n,m)}$.

158. $\left(g_n, g_m\right) = g_{(n,m)}$.

159. **а)** По теореме о линейном представлении НОД найдутся многочлены u, v такие, что $fu + gv = 1$. Разделим u на g и v на f с остатком: $u = pg + r, v = qf + s$ и $\deg r < \deg g, \deg s < \deg f$. Тогда имеем

$1 = fu + gv = f\left(pg + r\right) + g\left(qf + s\right) = fg\left(p + q\right) + \left(fr + gs\right)$. Если $p + q \neq 0,$ то $\deg\left(fg\left(p + q\right)\right) \geq \deg\left(fg\right), \deg\left(fr + gs\right) < \deg\left(fg\right)$.

Значит, степень левой части равенства $1 - \left(fr + gs\right) = fg\left(p + q\right)$ меньше, чем степень правой части, что невозможно. Тем самым, доказана возможность соответствующего представления НОД. Докажем теперь единственность пары u, v. Допустим, что есть еще одна пара u_1, v_1. Тогда $fu + gv = d = fu_1 + gv_1$, откуда немедленно вытекает $f\left(u - u_1\right) = g\left(v_1 - v\right)$. Поскольку $f, g -$взаимно просты, то $\left(u - u_1\right)$ делится на g, откуда $u - u_1 = 0$ или $\deg\left(u - u_1\right) \geq \deg g$. Однако по предположению $\deg u < \deg g, \deg u_1 < \deg g,$ значит, $\deg\left(u - u_1\right) < \deg g$. Таким образом, $u - u_1 = 0$или $u = u_1$. Аналогично доказывается, что $v = v_1$.

б) Пусть $\left(f, g\right) = d, f = f_1 d, g = g_1 d$. Если хотя бы один из многочленов f_1, g_1 имеет положительную степень, что существуют единственные многочлены u, v такие, что $fu + gv = d$ и $\deg u < \deg g_1, \deg v < \deg f_1$.

160. **а)** $2a$; **б)** a^2+b^2; **в)** $4abi$.

161. **а)** $ab-c^2-d^2$; **б)** $(a-b)^2$; **в)** -2.

162. **а)** 0; **б)** $-\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; **в)** $\frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$.

163. **а)** Пусть $z=x+yi$. Тогда левая часть уравнения принимает вид $(x+yi)+2(x-yi)=3x-yi$. Сравнивая действительные и мнимые части, получаем $z=a-bi$. **б)** $z=-a+bi$.

164. *Указание*. Записать числа в алгебраической форме $z=a+bi, t=c+di$, и вычислить левую и правую части.

165. Тождество Эйлера совпадает с равенством $|zt|^2=|z|^2\cdot|t|^2$, если комплексные числа $z=a+bi, t=c+di$ записаны в алгебраической форме.

166. **а)** $\frac{2\left(a^2-b^2\right)}{a^2+b^2}$; **б)** $\frac{4abi}{a^2+b^2}$.

167. **а)** $(1;i)$; **б)** $(1+i;i)$; **в)** $(i;1+i)$; **г)** $(2-i;1+i)$.

168. **а)** $4\cos\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}$; **б)** $2\cos\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}$.

169. **а)** Прямая $x=3$; **б)** горизонтальная полоса, ограниченная прямыми $y=1, y=2$; **в)** окружность с центром в начале координат и радиусом 1; **г)** луч, выходящий из начала координат, расположенный в первом квадранте и лежащий на прямой $y\sqrt{3}=x$, из которого удалено начало координат.

170. **а)** Окружность единичного радиуса с центром в точке (0; 1); **б)** круг единичного радиуса с центром в точке (0; 1); **в)** тот же круг, но без границы; **г)** внешность того же круга.

171. **а)** $2\left[\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$; **б)** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$;

в) $2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right]$;

г) $\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)$.

172 **г)** Пусть $z = \cos x + i\sin x$. Тогда $z^3 = \cos 3x + i\sin 3x$ по формуле Муавра. С другой стороны,

$$z^3 = \left(\cos x + i\sin x\right)^3 = \left(\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x\right) +$$
$$+\left(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x\right)i.$$

Сравнивая действительные части двух представлений, получаем $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
Откуда и вытекает требуемая формула понижения степени.

173. **а)** Пусть $z_1,...,z_5$ – корни уравнения. Тогда по основной теореме верно равенство

$$z^5 - 1 = \left(z - z_1\right)...\left(z - z_5\right) = z^5 - \left(z_1 + ... + z_5\right)z^4 + ... - z_1...z_5.$$

Сравнивая коэффициенты при z^4 и свободные члены, получим $z_1 + ... + z_5 = 0,\ z_1...z_5 = 1$. **б)** $5, -5$.

174. Пусть U_n – множество корней n-ой степени из 1. **а)** U_{n+1}. Если z – ненулевой корень уравнения, то $z^{n+1} = |z|^2$, и переходя к модулям, получим $|z|^{n-1} = 1, |z| = 1$. Значит, $z^{n+1} = 1$, или множество $z \in U_{n+1}$. Обратно, если $z \in U_{n+1}$, то $z^{n+1} = 1, |z| = 1$, значит, $z \cdot z^n = z \cdot \overline{z},\ z\left(z^n - \overline{z}\right) = 0$. Поскольку $z \neq 0$, то $z^n = \overline{z}$.
б) $2 \cdot U_{n+2}$. **в)** $3 \cdot U_{n+3}$.

1.6. Многочлены и дроби над R и C

175. Да, любой многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень. В самом деле, если все корни комплексные, то многочлен разлагается в произведение квадратных трехчленов с отрицательным дискриминантом, а значит, имеет четную степень.

176. *Указание.* $f(x)$ по теореме Безу делится на $\left(x - w\right)\left(x - \overline{w}\right)$, совпадающий с $x^2 - 2ax + \left(a^2 + b^2\right)$.

177. *Указание.* Используя предыдущую задачу, провести индукцию по степени многочлена.

178. **а)** $(z - i)(z + i)(z - 2i)(z + 2i)$; **б)** $\left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

179. Все утверждения верны, поскольку корни второго многочлена являются корнями первого, причем кратность любого корня первого многочлена не ниже, чем его кратность для второго многочлена.

180. **а)** 3; **б)** 1; **в)** 1; **г)** 3. *Указание*. Число линейных многочленов со старшим коэффициентом 1, являющихся делителями f, равно числу корней уравнения $f = 0$ (без учета их кратности).

Решение. **а)** $f = x(x-1)(x-2)$. **б)** $f = (x-1)^3 - 2$.

в) Поскольку производная $f' = 3x^2 + 3 > 0$, то функция $y = f(x)$ строго возрастает, а значит, имеет не более одного корня. Осталось заметить, что кубический многочлен имеет хотя бы один действительный корень.

г) $f' = 3x^2 - 3 = 0$ в точках ± 1. Поскольку $f(-2) = -1, f(-1) = 3,\ f(1) = -1, f(2) = 3$, то многочлен f на каждом из промежутков $[-2; -1]$, $[-1; 1]$, $[1; 2]$ имеет корень.

Можно предложить другое решение, основанное на использовании тригонометрической формулы $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ (см. задачу 172 г)). Пусть $x^3 - 3x + 1 = 0$. Заменим переменную $x = 2t$. Тогда уравнение принимает вид $8t^3 - 6t + 1 = 0$. Легко понять, что всякий корень этого уравнения по модулю меньше 1, поэтому его корни следует искать в виде $t = \cos\alpha, \alpha \in [o; \pi]$, а само уравнение удобно разделить на 2: $4t^3 - 3t + \frac{1}{2} = 0$. Положим $\varphi = 3\alpha$. Тогда имеем $\cos\varphi = -\frac{1}{2}, \varphi \in [o; 3\pi]$. Значит, $\varphi = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$. Указанные три значения для переменной φ легко перевести в три значения для переменной x, откуда и получаются 3 корня данного кубического многочлена.

181. **а)** $x^2 + 1$; **б)** $x^2 + x + 1$; **в)** $x^2 + x + 1, x^2 + 2x + 3$;

г) $x^2 - x + 1, x^2 - 2x + 4$. *Указание*. Разложить многочлен на неприводимые множители и воспользоваться теоремой о разложении многочлена над **R** на неприводимые сомножители.

182. **а)** $(z^3 - 1)(z + 1)$; **б)** $(z^5 - 1)(z^2 + z + 1)(z^2 + 1)(z + 1)$.

183. На основании теоремы о простейших дробях для подходящих чисел b_i справедливо равенство:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{b_1}{(x-c_1)} + \frac{b_2}{(x-c_2)} + \ldots + \frac{b_n}{(x-c_n)}.$$

Умножив обе части равенства на $f(x)$, получим

$$1 = \frac{f(x)b_1}{(x-c_1)} + \frac{f(x)b_2}{(x-c_2)} + \ldots + \frac{f(x)b_n}{(x-c_n)} =$$

$$= b_1(x-c_2)\ldots(x-c_n) + (x-c_1)g(x).$$

Подставляя вместо x число c_1, получаем

$1 = b_1(c_1 - c_2) \ldots (c_1 - c_n)$.

Заметив теперь, что $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x)}{(x-c_i)}$, имеем $f'(c_1) = (c_1 - c_2)\ldots(c_1 - c_n)$, следовательно, $b_1 = \frac{1}{f'(c_1)}$. Аналогично находятся остальные значения $b_2, \ldots, b_n$. □

184. **а)** Найдем сначала разложение над **C**. Пусть $w^3 = 1, w \neq 1$. Тогда многочлен $f = x^3 + 1$ имеет корни: $-1, -w, -\overline{w}$. Поскольку $0 = w^3 - 1 = (w-1)(w^2 + w + 1)$, то $w + \overline{w} = -1$, $w\overline{w} = 1$.

Учитывая равенства $f' = 3x^2$, $f'(-w) = 3$, на основании задачи 183 получаем разложение дроби на простейшие над **C**:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{w}{x+w} + \frac{\overline{w}}{x+\overline{w}}\right).$$

Заметив теперь, что

$$\frac{w}{x+w} + \frac{\overline{w}}{x+\overline{w}} = \frac{(w+\overline{w})x + 2w\overline{w}}{x^2 + (w+\overline{w})x + w\overline{w}} = \frac{(w+\overline{w})x + 2w\overline{w}}{x^2 + (w+\overline{w})x + w\overline{w}} =$$

$= \frac{-x+2}{x^2 - x + 1}$, получаем разложение над **R**

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right).$$

б) По теореме о простейших дробях имеем представление

$\frac{1}{x^4+4} = \frac{ax+b}{x^2+2-2x} + \frac{cx+d}{x^2+2+2x}$, в котором a, b, c, d – неизвестные действительные числа. После умножения обеих час-

тей равенства на общий знаменатель получим равенство многочленов: $1 = (ax + b)(x^2 + 2x + 2) + (cx + d)(x^2 - 2x + 2)$.
Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной, получаем систему линейных уравнений:

$a + c = 0$, $\quad 2a + b - 2c + d = 0$,

$2a + 2b + 2c - 2d = 0$, $\quad 2b + 2d = 1$,

из которой легко найти: $8a = -1$, $4b = 1$, $8c = 1$, $4d = 1$. Значит,

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{1}{8}\left(\frac{-x+2}{x^2+2-2x} + \frac{x+2}{x^2+2+2x}\right).$$

Можно было бы рассуждать иначе, указав сначала разложение на простейшие над **C**. Заметим, что многочлен $f = x^4 + 4$ имеет корни $w_1 = u = 1 + i,\ w_2 = \overline{u},\ w_3 = v = -1 + i,\ w_4 = \overline{v}.$

Тогда ввиду задачи 183:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f'(w_1)(x-w_1)} + \ldots + \frac{1}{f'(w_4)(x-w_4)}.$$ Далее,

$$f'(x) = 4x^3,\ f'(w) = \frac{4w^4}{w} = -\frac{16}{w}, \text{если } f\left(w\right) = 0.$$

Значит, $\dfrac{1}{f(x)} = -\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{w_1}{(x-w_1)} + \ldots + \dfrac{w_4}{(x-w_4)}\right).$

Наконец, поскольку

$$\frac{u}{(x-u)} + \frac{\overline{u}}{(x-\overline{u})} = \frac{x\left(u+\overline{u}\right) - 2u\overline{u}}{x^2 - \left(u+\overline{u}\right)x + u\overline{u}} = \frac{2x-4}{x^2-2x+2};$$

$$\frac{v}{(x-v)} + \frac{\overline{v}}{(x-\overline{v})} = \frac{x\left(v+\overline{v}\right) - 2v\overline{v}}{x^2 - \left(v+v\right)x + v\overline{v}} = \frac{-2x-4}{x^2+2x+2};$$

то $\dfrac{1}{x^4+4} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{-x+2}{x^2-2x+2} + \dfrac{x+2}{x^2+2x+2}\right).$ □

185. Для многочлена $f = x^n - 1$ справедливо равенство $f = (x - w_1)\ldots(x - w_n)$, где $w_1, \ldots, w_n$ – комплексные корни из 1. Кроме того, для его производной верно $f' = nx^{n-1}$, $f'\left(w_k\right) = n{w_k}^{n-1} = \dfrac{n}{w_k}$. Значит, в силу задачи 183 получаем

$$\frac{1}{x^n-1} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{x-w_k}\right).$$ □

186. *Указание*. Воспользоваться определением.

187. *Решение*. $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{x}) = 0 \cdot f(\vec{x}) = \vec{0}$; $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$.

188. *Решение*. Очевидно, для произвольного вектора $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \in \mathbf{R}^3$ преобразование p_1 может быть записано в виде $p_1(\vec{x}) = x_1\vec{e}_1$. Его линейность проверяется так же, как и линейность отображений пп. б), в) примера 1. Далее, очевидно, что $p_1(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$, $p_1(\vec{e}_2) = \vec{0}$, $p_1(\vec{e}_3) = \vec{0}$; поэтому матрицей преобразования p_1 в стандартном базисе будет матричная единица E_{11}.

189. **а)** $A' = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; **б)** $A' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

190. $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Решение. Найдем матрицу T перехода от базиса $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ к базису $E' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$. В соответствии с принятыми обозначениями $E' = ET$, т.е. $Q = PT$, где $Q = E' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $P = E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}$. Поэтому искомая матрица перехода имеет вид

$$T = P^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Теперь находим матрицу A' линейного преобразования в новом базисе $A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

191. *Решение.* **а)** Пусть $(E), (E')$ – два базиса, $A = A_f(E)$, $A' = A_f(E')$, т.е. $f(E') = (E')A'$ и $f(E) = (E)A$. Допустим, что $(E') = (E)T$. Учитывая равенства

$f(E') = (E')A' = (E)TA'$,

$f(E') = f((E)T) = f((E))T = (E)AT$,

получаем $(E)TA' = (E)AT$, откуда $TA' = AT$ и $A' = T^{-1}AT$. **б)** Пусть $A' = T^{-1}AT$. Возьмем какой-нибудь базис (E) и положим $(E') = (E)T$. Система (E') также будет базисом ввиду обратимости матрицы T. Рассмотрим линейное преобразование f, отвечающее матрице $A: f(E) = (E)A$. Тогда $A_f(E') = T^{-1}AT = A'$. **в)** Пусть $A = A_f(E), A' = A_f(E')$ и $(E') = (E)T$. Если $A' = T^{-1}AT$ и $TA = AT$, то $A' = T^{-1}(AT) = T^{-1}(TA) = A$. Если же $A' = A$, то $T^{-1}AT = A$, откуда $AT = TA$.

192. **а)** Да; **б)** нет. *Указание*. Найдите матрицу преобразования f в стандартном базисе.

193. $f(\vec{x}) = (AX)^{\mathrm{T}}$. **а)** $((\cos\varphi)x_1 - (\sin\varphi)x_2; (\sin\varphi)x_1 + (\cos\varphi)x_2)$; **б)** $((\cos\varphi)x_1 + (\sin\varphi)x_2; -(\sin\varphi)x_1 + (\cos\varphi)x_2)$; **в)** $(x_1; -x_2)$; **г)** $(-x_1; x_2)$.

194. Используя свойство линейности f и свойства скалярного произведения, преобразуем обе части равенства $\left(f(\vec{x}+\vec{y}), f(\vec{x}+\vec{y})\right) = (\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y})$. Имеем:

$2\left(f(\vec{x}), f(\vec{y})\right) = 2(\vec{x}, \vec{y})$,

поскольку $\left(f(\vec{x}), f(\vec{x})\right) = (\vec{x}, \vec{x})$ для любого $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$.

195. *Указание*. Пусть $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$, $\{\vec{e}_1\,'; \vec{e}_2\,'\}$ – базисы в $\mathbf{R}^2$; f – линейное преобразование, переводящее первый базис во второй, т.е. $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1\,'$, $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2\,'$. Докажите, что f – ортогональное преобразование тогда и только тогда, когда выполнены условия: $(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = (\vec{e}_1\,'; \vec{e}_1\,')$, $(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = (\vec{e}_2\,'; \vec{e}_2\,')$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{e}_1\,'; \vec{e}_2\,')$.

196. Нет; если преобразование f в базисе (1; 0), (0; 1) имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то его матрица в базисе (1; 0), (0; 2) имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, т.е. не является симметрической.

2.2. Собственные векторы и собственные значения

197. $\lambda_{1,2}=2, \lambda_3=4$. *Решение.* $A_f=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; характеристический многочлен матрицы A_f имеет вид $X^3-8X^2+20X-16$, корни которого 2 и 4.

198. *Указание.* Подставить $\operatorname{tr}(A)=a+b, \det(A)=ab-cd$ и вычислить левую часть.

199. *Указание.* Проверить, что если $f\left(\vec{a}\right)=\lambda\vec{a}, f\left(\vec{b}\right)=\lambda\vec{b}$, то для любого числа μ верно $f\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right), f\left(\mu\vec{a}\right)=\lambda\left(\mu\vec{a}\right)$.

200. *Указание.* Равенство $A_f\left(E\right)=E\cdot diag\left(\lambda_1,...,\lambda_n\right)$, означает, что векторы базиса E являются собственными для f. Верно и обратное утверждение.

201. *Указание.* $f\left(A\right)=\begin{pmatrix} 1 & f'(1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Проверить, что матрица $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ подобна диагональной, только если значение $a=0$ является собственным.

202. Пусть $B=S^{-1}AS$ и X_1, X_2, X_3 – собственный базис для A. Тогда $S^{-1}X_1, S^{-1}X_2, S^{-1}X_3$ – собственный базис для B, поскольку $BS^{-1}X_i=S^{-1}ASS^{-1}X_i=S^{-1}X_i$ и векторы $S^{-1}X_1, S^{-1}X_2, S^{-1}X_3$ линейно независимы ввиду обратимости матрицы S^{-1}.

203. Собственные значения матриц A и A^T совпадают, поскольку равны их характеристические многочлены. Пример: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

204. Да.

205. **а)** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{3}(-2;-2;1)$, $\frac{1}{3}(1;-2;-2)$, $\frac{1}{3}(-2;1;-2)$;

б) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1;0)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1;1;1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1;1;-2)$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1;0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1;1;2)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1;-1;1)$.

206. **а)** $C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $C = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & \sqrt{6} & \sqrt{3} & 3 \\ 0 & 2\sqrt{6} & -\sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{3} & -3 \\ 3\sqrt{2} & -\sqrt{6} & -\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}$.

2.3. Квадратичные формы

207. **а)** $A' = P^{\mathrm{T}} A P$; **б)** $(A')^{\mathrm{T}} = (P^{\mathrm{T}} A P)^{\mathrm{T}} = P^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} P = A'$; **в)** $|A||A'| < 0$.

208. Пусть $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Тогда $AC = CD$, $D = C^{-1} A C$.

Ввиду ортогональности матрицы C имеем:

$$\Phi = X^T A X = (CX')^T A (CX') =$$

$$= (X')^T (C^T A C) X' = (X')^T (C^{-1} A C) X' = (X')^T D X'.$$

209. **а)** $\hat{\mathrm{O}} = -9y_1^2 + 9y_2^2 + 18y_3^2$, $C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\hat{\mathrm{O}} = -2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2$, $C = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\hat{\mathrm{O}} = 3y_1^2 - 9y_2^2 + 9y_3^2,\ C = \dfrac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 4 & -\sqrt{2} \\ 3 & 1 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix};$

г) $\hat{\mathrm{O}} = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2,\ C = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$

210. **а)** $\hat{\mathrm{O}} = \left(x_1 + x_3\right)^2 + \left(x_2 + x_3\right)^2 + \left(x_3 + x_1\right)^2;$

б) $\hat{\mathrm{O}} = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 + \left(x_2 + x_3\right)^2 + x_3^2;$

в) $\hat{\mathrm{O}} = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - \left(x_2 + 2x_3\right)^2 - x_3^2;$

г) $\hat{\mathrm{O}} = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - \left(x_2 + x_3\right)^2 - \left(x_1 + x_3\right)^2.$

211. **а)** $-1 < \lambda < 1$; **б)** $2 < \lambda < 6$; **в)** $\dfrac{2}{3} < \lambda < 2.$

212. *Указание*. $\Phi(\lambda \overset{r}{a}) = \lambda^2 \Phi(\overset{r}{a})$.

213. *Указание*. Если квадратичная форма с матрицей A положительно определена и имеет канонический вид $\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, то $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$ и квадратичная форма с матрицей A^{-1} имеет канонический $\lambda_1^{-1} y_1^2 + \ldots + \lambda_n^{-1} y_n^2$, значит, также является положительно определенной.

214. *Указание*. **а)** Миноры формы $\Phi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ имеют вид $\Delta_1 = a_{11}$ и $\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$; число $\left(-4\Delta_2\right)$ совпадает с дискриминантом квадратного трехчлена Φ; квадратный трехчлен принимает положительные значения только, если его старший коэффициент положителен, а дискриминант отрицателен. **б)** Представим квадратичную форму $\Phi\left(x_1, x_2, x_3\right) = \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j$ в виде $\Phi = \Phi_1 + 2\sum\limits_{i=1}^{3} a_{i3}x_i x_3 + a_{33}x_3^2$, где $\Phi_1 = \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}x_i x_j$ есть квадратичная форма от переменных x_1, x_2. При $x_3 = 0$ будем иметь $\Phi = \Phi_1$, поэтому из положительной определенности формы Φ следует положительная определенность Φ_1. Угловые миноры формы Φ_1 совпадают с угловыми минорами Δ_1, Δ_2 формы Φ, поэтому $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$. Для доказательства положительности минора $\Delta_3 = |A|$ заметим, что при замене координат матрица A квадратичной формы преобразуется в матрицу $A' = P^T AP$, где P – матрица перехода. Поскольку $|A'| = |P^T||A||P| = |P|^2 |A|$, то знаки $|A|$ и $|A'|$ совпадают. Но для формы $\Phi' = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2$, к которой Φ приводится преобразованием координат, минор $\Delta_3' = |A'| = a_1 a_2 a_3$, больше нуля. Значит, он положителен и для исходного вида формы Φ.

3.1. Число и вектор Фробениуса

215. *Указание*. См. пример 3.1.2 на стр. 67.

216. *Указание*. Найти собственные векторы.

217. $\vec{x}_A = a \cdot I^{\mathrm{T}},\ a > 0,\ I = (1; 1; \ldots; 1)$.

218. Выберем в качестве вектора Фробениуса $\vec{x}_A$ вектор, сумма координат которого равна единице, т.е. $I^T \vec{x}_A = 1$. Так как $A\vec{x}_A = \lambda_A \vec{x}_A$, то, умножая это равенство слева на I^T, получим:

$$\vec{c}^{\,T} \vec{x}_A = \left(I^T A\right)\vec{x}_A = I^T\left(A\vec{x}_A\right) = \lambda_A \left(I^T \vec{x}_A\right) = \lambda_A,$$

$$\lambda_A = \vec{c}^{\,T} \vec{x}_A = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3.$$

Отсюда следует, что $s = s\left(x_1 + x_2 + x_3\right) \le \lambda_A \le S\left(x_1 + x_2 + x_3\right) = S$.

219. **а)** $3,\ t(1; 1; 1),\ t > 0$; **б)** $5,\ t(1; 1; 1),\ t > 0$;
в) $9,\ t(0; 0; 1),\ t > 0$; **г)** $7,\ t(2; 4; 9),\ t > 0$.

220. *Указание*. Воспользоваться примером 3.1.2 на стр. 67.

221. **а)** $\alpha\lambda_A + \beta$; **б)** $\left(\lambda_A\right)^k$.

3.2. Балансовые модели Леонтьева и продуктивность

222. $X = (102{,}1; 56{,}2; 28{,}3)$.

223. $X = (109{,}4; 121{,}3; 62{,}4)$.

224. *Указание*. **а)** Формула обращения для матриц порядка 2;
б) Применить первый критерий продуктивности.

225. $A=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 6 & 8\end{pmatrix}$; первая отрасль нерентабельна, поскольку сумма чисел первого столбца больше 1; $(E-A)^{-1}=\left(\frac{1}{10}\begin{pmatrix}5 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}5 & \frac{5}{2}\\ 15 & \frac{25}{2}\end{pmatrix}>0$, значит, ввиду первого критерия матрица A продуктивна.

226. *Указание*. Сравнить матрицы A_1, A_2 с матрицей $B=\begin{pmatrix}0,5 & 0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,5 & 0,2\\ 0,2 & 0,3 & 0,5\end{pmatrix}$; число Фробениуса у первой матрицы меньше 1, а у второй больше 1. Значит, по второму критерию продуктивности, A_1 продуктивна, A_2 не продуктивна.

227. *Доказательство*. Число Фробениуса матрицы μA, где $\mu>0$, равно $\mu\lambda_A$. Значит, матрица μA продуктивна тогда и только тогда, когда $\mu\lambda_A<1$.

Если α – запас продуктивности матрицы A и $1<\mu<1+\alpha$, то $\mu\lambda_A<1$, $(1+\alpha)\lambda_A\geq 1$. Если бы неравенство было строгим, то можно было бы взять число $\mu<1+\alpha$ так, что $\mu\lambda_A>1$, что противоречит продуктивности матрицы μA в силу второго критерия продуктивности.

Обратно, если верно равенство $(1+\alpha)\lambda_A=1$, то для числа $1<\mu<1+\alpha$ верно $\lambda_{\mu A}=\mu\lambda_A<(1+\alpha)\lambda_A=1$ и $\lambda_{(1+\alpha)A}=(1+\alpha)\lambda_A=1$, то есть матрица μA продуктивна, а матрица $(1+\alpha)A$ не продуктивна.

228. *Решение*. Вычислим собственные значения матрицы $B=10A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 7 & 5\end{pmatrix}$:

$$|B-\lambda E|=\left|\begin{pmatrix}1 & 6\\ 7 & 5\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=-37-6\lambda+\lambda^2.$$

Уравнение $\lambda^2-6\lambda-37=0$ имеет корни

$\lambda_1 = 3 - \sqrt{46},\ \lambda_2 = 3 + \sqrt{46}.$

Значит, $\lambda_B = 3 + \sqrt{46},\ \lambda_A = \dfrac{3 + \sqrt{46}}{10}$. Далее, если α – запас продуктивности матрицы A, то $(1+\alpha)\lambda_A = 1$. Итак,

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_A} - 1 = \frac{10}{3 + \sqrt{46}} - 1 = 2.2251 \times 10^{-2} \approx 0,022.$$

229. *Решение.* Пусть X – сумма столбцов матрицы P, а Y – сумма столбцов матрицы $E + Q$; тогда имеем $(E - A)X = Y > 0$, откуда в силу следствия из второго критерия продуктивности вытекает продуктивность матрицы A.

230. *Решение.* **а)** $A = B + C,\ C \geq 0$. Поскольку A продуктивна, то существует $P \geq 0$ такая, что $(E - A)P = \big(E - (B + C)\big)P$, откуда $(E - B)P - CP = E,\ \ (E - B)P = E + CP$. Отсюда в силу задачи 4.15 вытекает продуктивность матрицы B. **б)** Допустим от противного, что $\lambda_A < \lambda_B$. Тогда $\lambda_B > 0$ и $\dfrac{\lambda_A}{\lambda_B} < 1$. Пусть $C = \dfrac{1}{\lambda_B}A$. Тогда $\lambda_C = \dfrac{\lambda_A}{\lambda_B} < 1$ и C продуктивна, следовательно, продуктивна и матрица $D = \dfrac{1}{\lambda_B}B$. С другой стороны, $\lambda_D = \dfrac{\lambda_B}{\lambda_B} = 1,$ – противоречие. Значит, $\lambda_A \geq \lambda_B$.

231. *Решение.* Поскольку A_1 продуктивна, то существует $P_{n+1} \geq 0$ такая, что $(E_{n+1} - A_1)P_{n+1} = E_{n+1}$. Значит, $\begin{pmatrix} E_n - A & -\vec{c}^{\,T} \\ -\vec{b} & 1 - d \end{pmatrix} P_{n+1} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $(E_n - A)P_n - \vec{c}^{\,T}\vec{p}_{n+1} = E_n$, где P_n – матрица, полученная из P_{n+1} вычеркиванием последней строки и последнего столбца, а вектор $\vec{p}_{n+1}$ состоит из первых n чисел последней строки матрицы P_{n+1}. Следовательно, $(E_n - A)P_n = E_n + \vec{c}^{\,T}\vec{p}_{n+1}$, значит, ввиду задачи 229 матрица A продуктивна.

232. *Указание*. Подставить вместо неизвестной x_n сумму $\overline{x}_n + x_n^*$.

233. *Указание*. Подставить вместо неизвестной x_n каждую из последовательностей.

234. *Указание*. Проверить, что определитель Казоратти отличен от 0.

235. *Решение*. **а)** $x_n = (n + C_1)\cdot 2^{n-1} + C_2$; **б)** Характеристическое уравнение имеет корень равный 2, кратность которого равна 2, значит, общее решение однородного уравнения имеет вид $\overline{x}_n = 2^n \cdot (C_1 + C_2 n)$, а частное решение можно искать в виде $x_n^* = C \cdot n^2 \cdot 2^n$. Имеем:

$$x_{n+2}^* = C\cdot(n+2)^2 \cdot 2^{n+2}, x_{n+1}^* = C\cdot(n+1)^2\cdot 2^{n+1},$$

$$2^n = x_{n+2}^* - 4x_{n+1}^* + 4x_n^* = C\cdot 2^n\left(4(n+2)^2 - 8(n+1)^2 + 4n^2\right) =$$

$$= C\cdot 2^{n+2}\left((n+2)^2 - 2(n+1)^2 + n^2\right) =$$

$$= C\cdot 2^{n+2}\left(4n + 4 - 2(2n+1)\right) = C\cdot 2^{n+3},$$

откуда $C = 2^{-3}$ и $x_n^* = n^2 \cdot 2^{n-3}$. Следовательно, общее решение имеет вид: $x_n = 2^n \cdot \left(C_1 + C_2 n + \dfrac{n^2}{8}\right)$; **в)** $x_n = (C_1 - 3n) + C_2 \cdot 4^n$.

236. $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - 1.$

237. *Решение.* От противного, предположим, что в некоторой точке n_0 определитель Казоратти равен 0 и рассмотрим систему линейных уравнений относительно неизвестных чисел C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 x^1(n_0) + C_2 x^2(n_0) = 0, \\ C_1 x^1(n_0 + 1) + C_2 x^2(n_0 + 1) = 0. \end{cases}$$

Так как определитель этой системы нулевой – это определитель Казоратти в точке n_0, то система имеет ненулевое решение (c_1, c_2). Рассмотрим последовательность $x(n) = c_1 x^1(n) + c_2 x^2(n)$. Она является ненулевым решением линейного однородного уравнения, иначе система функций $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$ была бы линейно зависима. С другой стороны, выполнены условия $x(n_0) = x(n_0 + 1) = 0$. Но этим начальным условиям очевидно удовлетворяет нулевая функция, что противоречит единственности задачи Коши. Следовательно, определитель Казоратти нигде не обращается в нуль. □

238. **а)** $x_{n+2}-5x_{n+1}+6x_n=0$; **б)** $x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=0$; **в)** $x_{n+2}+x_n=0$.

239. *Решение.* Ясно, что два линейно независимых решения $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$ существуют (это вытекает из способа построения базисных решений). Допустим, что x_n какое-нибудь решение. Докажем, что можно подобрать числа C_1 и C_2 так, что $x_n=C_1x_n^{(1)}+C_2x_n^{(2)}$. Поскольку определитель системы (относительно C_1 и C_2) $\begin{cases} C_1x_1^{(1)}+C_2x_1^{(2)}=x_1 \\ C_1x_2^{(1)}+C_2x_2^{(2)}=x_2 \end{cases}$ является определителем Казоратти и отличен от нуля, то она имеет решение (c_1,c_2). Тогда $\tilde{x}_n=x_n-c_1x_n^{(1)}-c_2x_n^{(2)}$ также является решением, причем $\tilde{x}_1=\tilde{x}_2=0$, значит, $\tilde{x}_n=0-$нулевая последовательность, т.е. $x_n=c_1x_n^{(1)}+c_2x_n^{(2)}$.

240. *Решение.* Допустим, что $x_n=\cos n\varphi$ является решением уравнения $x_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n=0, c\neq 0$. Поскольку $2\cos n\varphi=e^{in\varphi}+e^{-in\varphi}$, то решением уравнения будет также последовательность $x_n=e^{in\varphi}+e^{-in\varphi}$. Тогда

$$e^{in\varphi}e^{i2\varphi}+e^{-in\varphi}e^{-i2\varphi}+be^{in\varphi}e^{i\varphi}+be^{-in\varphi}e^{-i\varphi}+ce^{in\varphi}+ce^{-in\varphi}=0,$$

$$e^{in\varphi}\left(e^{i2\varphi}+be^{i\varphi}+c\right)=-e^{-in\varphi}\left(e^{-i2\varphi}+be^{-i\varphi}+c\right),$$

$$e^{i2n\varphi}\left(e^{i2\varphi}+be^{i\varphi}+c\right)=-\left(e^{-i2\varphi}+be^{-i\varphi}+c\right).$$

Если $e^{i2\varphi}+be^{i\varphi}+c\neq 0$, то $e^{i2n\varphi}=-\dfrac{\left(e^{-i2\varphi}+be^{-i\varphi}+c\right)}{\left(e^{i2\varphi}+be^{i\varphi}+c\right)}=const,$

откуда $e^{i2(n+1)\varphi}=e^{i2n\varphi}e^{i2\varphi}$, значит, $e^{i2\varphi}=1$ или $\cos 2\varphi=1,-$ противоречие. Значит, $e^{i2\varphi}+be^{i\varphi}+c=0,$ т.е. решением уравнения является $x_n=e^{i\varphi}=\cos n\varphi+i\sin n\varphi,$ тогда решением будет $x_n=\sin n\varphi.$ Учитывая, что решения $x_n=\cos n\varphi$ и $x_n=\sin n\varphi$ линейно независимы, получаем, что общее решение имеет требуемый вид.

241. **а)** $x_n=C_1+C_2(-2)^n+C_3\cdot 3^n$; **б)** $x_n=C_1+C_2\cdot n+C_3(-2)^n$;
в) $x_n=C_1+C_2\cdot n+C_3\cdot n^2$; **г)** $x_n=(C_1+C_2\cdot n)2^n+C_3\cdot 3^n+1$.

242. **а)** $x_n = 3 + (-1)^n \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi(n-2)}{3}$;

б) $x_n = 5 + (-1)^n \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi(n-3)}{3}$.

4.2. Модели экономической динамики с дискретным временем

243. При указанных ограничениях уравнение Хикса и его характеристическое уравнение имеют вид $X_t = (2V) X_{t-1} - VX_{t-2}$, $\lambda^2 - 2V\lambda + V = 0$. Решение характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = V \pm \sqrt{V^2 - V}$.

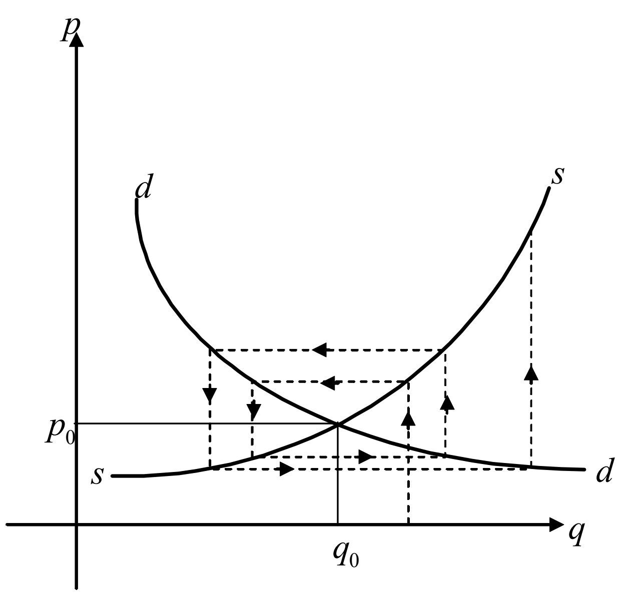
а) При $V < 1$ динамика роста носит колебательный характер с убывающей амплитудой, поскольку

$$\left| V + i\sqrt{-V^2 + V} \right| = \sqrt{V^2 + \left(\sqrt{-V^2 + V}\right)^2} = \sqrt{V} < 1.$$

б) При $V = 1$ рост национального дохода $X_t = C_1 + C_2 t$ имеет линейный характер. **в)** При $V > 1$ имеется неустойчивый характер роста, так как не может выполняться неравенство $V - \sqrt{V^2 - V} > 1$. Если оно верно, то $V - 1 > \sqrt{V^2 - V}$ и $V^2 - 2V + 1 > V^2 - V$, откуда $V < 1$ – противоречие.

244. Общее решение имеет вид $X_t = \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 t + 4 \cdot 2^t$ – это означает, что если спрос C_t имеет порядок 2^t, то национальный доход должен быть больше спроса в 4 раза.

245. $p_t = C_1(-k)^t + p^*$; **а)** последовательность цен (p_t) сходится к равновесному состоянию p^*; **б)** имеют место циклические колебания цены относительно равновесного состояния; **в)** последовательность (p_t) удаляется от равновесного состояния.



246. **а)** 109.30; 104.76; 100.00;
б) 85,73; 88,58; 91,87; 95,65; 100,00; **в)** 100.00; 100.00