Глава 4

# ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

Понятие выпуклого множества играет важную роль в задачах оптимизации, в частности, в задачах линейного программирования, которым будет посвящено отдельное пособие.

***Определение.*** Подмножество M n-мерного точечного арифметического пространства T называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками A и B оно содержит весь отрезок AB, т.е. все точки вида $X = sA + (1-s)B$, где $s \in [0;1]$.

Наглядно понятие выпуклого множества можно пояснить так: выпуклое множество – это множество, которое не имеет вмятин и дыр.

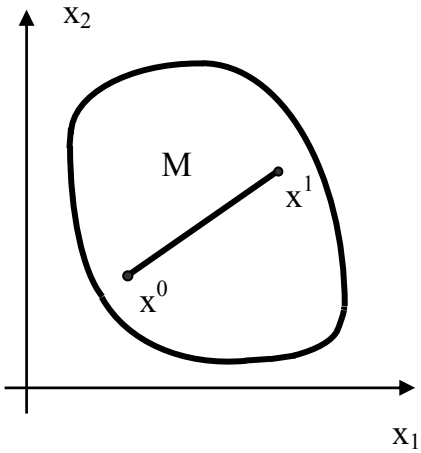


*Рис. 11*

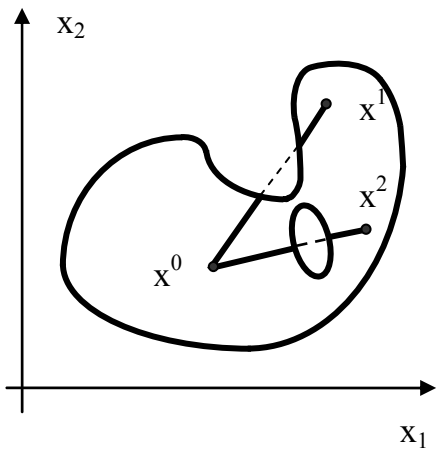


*Рис. 12*

На рис. 11 представлен пример выпуклого множества, а на рис. 12 – пример невыпуклого множества.

***Определение.*** **Полупространством** в n-мерном точечном арифметическом пространстве T называется множество всех точек $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют заданному линейному неравенству

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \geq 0$ .

**Теорема.** Любое полупространство в n-мерном точечном арифметическом пространстве есть выпуклое множество.

Пересечение любого числа выпуклых множеств есть либо пустое, либо выпуклое множество.

***Определение.*** Точка выпуклого множества $M$ называется *крайней*, если ее нельзя представить как внутреннюю точку отрезка, соединяющего различные точки из $M$.

Крайние точки называются также *угловыми точками, или вершинами*, выпуклого множества М. *Линейное ограничение* – это ограничение вида

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b \geq 0,$$

где вместо знака "≥" возможны знаки "=" и "≤". Линейное ограничение задает либо гиперплоскость (знак "="), либо полупространство (знаки "≥" и "≤"). Гиперплоскость и полупространство являются выпуклыми множествами. Выпуклым множеством является также всякое множество, заданное системой линейных ограничений, поскольку его можно представить как пересечение гиперплоскостей и полупространств, соответствующих линейным ограничениям системы.

Рассмотрим систему $S$ линейных ограничений, имеющую непустое множество решений $M$. Далее считаем, что $S$ не содержит "лишних" уравнений, т.е. уравнений, вытекающих из других уравнений системы. Обозначим символом $S'$ систему линейных уравнений, полученную в результате замены в $S$ всех знаков "≥" и "≤" на знак "=". Точка $X \in M$ является вершиной в том и только в том случае, если $X$ – единственное решение некоторой подсистемы из $n$ уравнений системы $S'$, содержащей все исходные уравнения системы $S$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_p$ – некоторый набор точек из $\mathrm{R}^n$.

Ограниченное множество в $\mathrm{R}^n$ называется *выпуклым многогранником*, если оно может быть задано системой линейных ограничений. Известно, что выпуклая оболочка нескольких точек является выпуклым многогранником, а всякий выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин.

***Определение.*** *Выпуклой многогранной областью* называется пересечение нескольких полупространств.

Таким образом, выпуклая многогранная область задается конечной системой линейных неравенств.

***Определение.*** *Выпуклым многогранником* в n-мерном точечном арифметическом пространстве T называется ограниченная выпуклая многогранная область.

***Способ нахождения вершин выпуклой многогранной области***

Для нахождения вершин выпуклой многогранной области $M \subset T$, заданной конечной системой линейных неравенств с n неизвестными выберем n неравенств и заменим их равенствами. Получим систему n линейных уравнений с n неизвестными. Если она имеет единственное решение точку A, причем $A \in M$, то $A$ – вершина области *M*.

***Определение.*** *Выпуклой линейной комбинацией* системы точек $A_1,\ldots,A_k$ из n-мерного точечного пространства T называется любая точка A вида $A = s_1 A_1 + \ldots + s_k A_k$, где $s_1 \geq 0,\ldots,s_k \geq 0$ и $s_1 + \ldots + s_k = 1$.

***Определение.*** **Выпуклой оболочкой** $conv(A_1,\ldots,A_k)$ системы точек $A_1,\ldots,A_k$ из n-мерного точечного пространства T называется множество всех выпуклых линейных комбинаций системы этих точек.

**Теорема.** Выпуклая оболочка точек $A_1, A_2,..., A_p$ является выпуклым множеством и содержится в любом выпуклом множестве, содержащем точки $A_1, A_2,..., A_p$.

Для наглядного представления о выпуклой оболочке конечной системы точек на плоскости можно накинуть нитку на часть плоскости, содержащую все эти точки, а затем стянуть нитку до предела.

Примеры

**1.** Построить множество $M$, заданное неравенствами
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq -3, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 7, \end{cases}$$
и найти его угловые точки.

Решение.

Каждому неравенству соответствует полуплоскость: $H_1 = \{x_1 - 3x_2 \geq -3\}$ – для первого, $H_2 = \{2x_1 + x_2 \geq 6\}$ – для второго, $H_3 = \{x_1 + 2x_2 \geq 7\}$ – для третьего неравенства. Границами этих полуплоскостей служат прямые $l_1 : x_1 - 3x_2 = -3$, $l_2 : 2x_1 + x_2 = 6$ и $l_3 : x_1 + 2x_2 = 7$. Прямая $l_1$ пересекает оси координат в точках $(-3; 0)$ и $(0; 1)$, $l_2$ – в точках $(3; 0)$ и $(0; 6)$, $l_3$ – в точках $(7; 0)$ и $(0; 3{,}5)$. Строим эти точки, затем, и сами прямые $l_1, l_2, l_3$. Для того, чтобы определить с какой стороны от построенных прямых расположены полуплоскости $H_1, H_2, H_3$. воспользуемся методом пробной точки. Точка $(0; 0)$ удовлетворяет первому неравенству, поэтому полуплоскость $H_1$ расположена с той же стороны от $l_1$, что и точка $(0; 0)$, т.е. ниже прямой $l_1$ (рис. 13). Точка $(0; 0)$ не удовлетворяет второму неравенству, поэтому относительно точки $(0; 0)$ полуплоскость $H_2$ расположена с другой стороны от $l_2$ (справа). Аналогично, $(0; 0)$ не удовлетворяет третьему неравенству, поэтому $H_3$ – выше прямой $l_3$. Так как точки множества $M$ удовлетворяют всем трем неравенствам, то $M = H_1 \cap H_2 \cap H_3$. Из рисунка ясно, что прямая $l_2$ не касается $M$, поэтому $M$ имеет только одну вершину – $A = l_1 \cap l_3$.

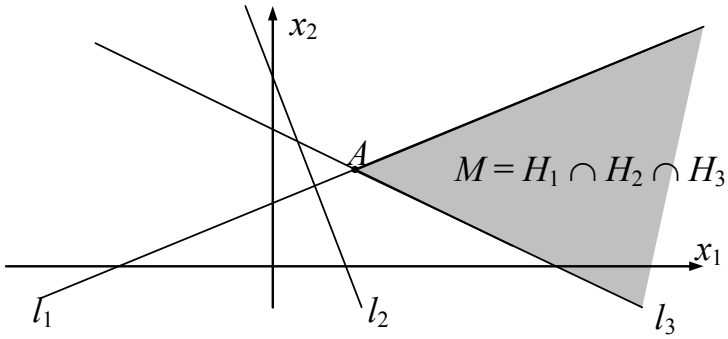


*Рис. 13*

Решая систему $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -3, \\ x_1 + 2x_2 = 7, \end{cases}$ находим точку $A(3;\ 2)$.

***Ответ:*** $A(3;\ 2)$

**2.** Пусть $X \subset \mathrm{R}^3$ – множество неотрицательных наборов товаров $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$, имеющих стоимость не более 60 при ценах $p_1 = 4, p_2 = 5, p_3 = 15$. Множество $X$ задается системой линейных ограничений

$$S: \begin{cases} x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 15x_3 \le 60. \end{cases}$$

Найти вершины $X$.

Решение.

Система $S'$ имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 15x_3 = 60. \end{cases}$$

Перечислим все подсистемы из трех уравнений в $S'$:

| подсистема 1 | подсистема 2 | подсистема 3 | подсистема 4 |
|---|---|---|---|
| $x_1$=0 | $x_1$=0 | $x_1$=0 | $x_2$=0 |
| $x_2$=0 | $x_2$=0 | $x_3$=0 | $x_3$=0 |
| $x_3$=0 | $4x_1+5x_2+15x_3=60$ | $4x_1+5x_2+15x_3=60$ | $4x_1+5x_2+15x_3=60$ |

Каждая из этих подсистем имеет единственное решение: $A_1(0;0;0)$, $A_2(0;0;4)$, $A_3(0;12;0)$ и $A_4(0;0;15)$, соответственно.

Точки $A_1, A_2, A_3, A_4$ удовлетворяют ограничениям исходной системы $S$, поэтому все они – вершины множества (многогранника) $X$.

**3.** Пусть $X \subset \mathrm{R}^4$ – множество всех неотрицательных наборов товаров $\vec{x}$, имеющих стоимость $(\vec{p}, \vec{x}) = 6$ при ценах $\vec{p} = (1; 1; 2; 1)$ и имеющих стоимость $(\vec{p}, \vec{x}) = 9$ при ценах $\vec{p} = (1; 2; 1; 2;)$. Найдем вершины $X$ двумя способами.

Первый способ решения.

Множество $X$ задается системой

$$S: \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ \quad x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

Записываем сначала систему

$$S':\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=6, \\ x_1+2x_2+x_3+2x_4=9, \\ x_i=0,\ i=1,\dots,4, \end{cases}$$

а, затем, – все ее подсистемы из четырех уравнений, содержащие два исходных уравнения системы $S$:

| подсистема $S_1$ | подсистема $S_2$ | подсистема $S_3$ |
|---|---|---|
| $x_1+x_2+2x_3+x_4=6$ | $x_1+x_2+2x_3+x_4=6$ | $x_1+x_2+2x_3+x_4=6$ |
| $x_1+2x_2+x_3+2x_4=9$ | $x_1+2x_2+x_3+2x_4=9$ | $x_1+2x_2+x_3+2x_4=9$ |
| $x_1=0$ | $x_1=0$ | $x_1=0$ |
| $x_2=0$ | $x_3=0$ | $x_4=0$ |

| подсистема $S_4$ | подсистема $S_5$ | подсистема $S_6$ |
|---|---|---|
| $x_1+x_2+2x_3+x_4=6$ | $x_1+x_2+2x_3+x_4=6$ | $x_1+x_2+2x_3+x_4=6$ |
| $x_1+2x_2+x_3+2x_4=9$ | $x_1+2x_2+x_3+2x_4=9$ | $x_1+2x_2+x_3+2x_4=9$ |
| $x_2=0$ | $x_2=0$ | $x_3=0$ |
| $x_3=0$ | $x_4=0$ | $x_4=0$ |

Подсистема $S_2$ несовместна, в то время как остальные подсистемы имеют следующие решения: $S_1$ – $A(0;0;1;4)$, $S_3$ – $B(0;4;1;0)$, $S_4$ – $C(3;0;0;3)$, $S_5$ – $D(12;0;-3;0)$, $S_6$ – $E(3;3;0;0)$. Точка $D$ не удовлетворяет ограничениям системы $S$, поэтому вершинами $X$ являются точки $A, B, C$ и $E$.

Второй способ решения.

С помощью элементарных преобразований (методом Гаусса) приводим систему $S$ к виду

$$\begin{cases} x_1=3-3x_3, \\ x_2=3+x_3-x_4. \end{cases}$$

Поскольку $x_1\ge 0, x_2\ge 0,$ то получаем систему неравенств для переменных $x_3, x_4$:

$$\begin{cases} 3-3x_3\ge 0, \\ 3+x_3-x_4\ge 0, \\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0. \end{cases}$$

Данная система задает множество $X'$ в координатной плоскости $Ox_3x_4$ (рис. 14).

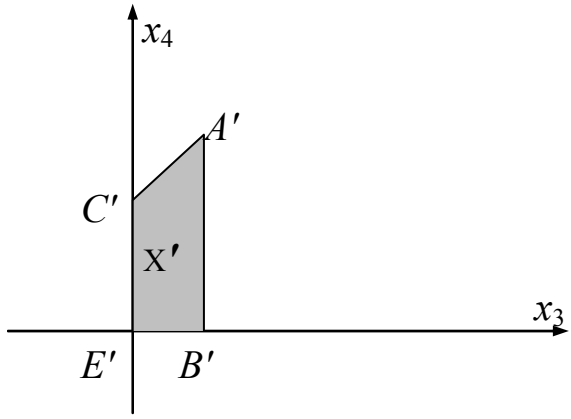


*Рис. 14*

Находим вершины $X': A'(1;4), B'(1;0), C'(0;3), E'(0;0)$. Используя равенства $x_1 = 3 - 3x_3$ и $x_2 = 3 + x_3 - x_4$ определяем вершины $X: A(0;0;1;4)$, $B(0;4;1;0)$, $C(3;0;0;3)$, $E(3;3;0;0)$.

**4.** Предприятие, выпускающее $n$ видов товаров, в каждый момент времени может работать по одной из технологий $1,...,m$. Обозначим $\vec{x}^i = (x_1^i, ..., x_n^i)$ набор товаров, производимый предприятием за час работы по технологии $i$ $(i = 1,...,m)$. Пусть $t_i$ – время (в часах) работы по технологии $i$, $T = t_1 + ... + t_m$ – суммарное время работы. Набор товаров $\vec{x} = (x_1,...,x_n)$, произведенный за все время $T$, может быть представлен как неотрицательная комбинация векторов $\vec{x}^1,...,\vec{x}^m$:

$$\vec{x} = t_1\vec{x}^1 + ... + t_m\vec{x}^m.$$

Обозначим $s_i = \dfrac{t_i}{T}$ долю времени, соответствующую технологии $i$. Имеем $\vec{x} = s_1X^1 + s_2X^2 + ... + s_mX^m$,

где $X^i = T\vec{x}^i$ – набор товаров, который предприятие может произвести за время $T$, работая только по технологии $i$. Так как $s_i \geq 0$ и $s_1 + ... + s_m = 1$, то $\vec{x}$ – выпуклая комбинация наборов $X^1,...,X^m$.

Вывод: множество всех наборов товаров, которые предприятие может произвести за время $T$, совпадает с выпуклой оболочкой точек $X^1,...,X^m$.

**5.** Имеются три сплава $A, B, C$. Сплав $A$ содержит 90% золота и 5% серебра, $B$ – 40% золота и 35% серебра, $C$ – 10% золота и 45 % серебра. Можно ли из этих сплавов составить новый сплав, содержащий 55% золота и 30% серебра?

Решение задачи разбирается в основном учебнике как пример 4.6 в параграфе о выпуклой оболочке. Решение состоит в выборе масштаба, дающем увеличение в 20 раз, построении треугольника с вершинами $D_1(18;1), D_2(8;7), D_3(2;9)$. Затем при достаточно точном построении треугольника $D_1D_2D_3$, убеждаемся в том, что точка $D_4(11;6)$, соответствующая новому сплаву, не принадлежит треугольнику $D_1D_2D_3$.

*Упражнения и тестовые вопросы*

**4.1.** Дать определение выпуклого множества. Построить следующие множества на координатной плоскости:

**а)** $M_1 = \{(x_1; x_2) \mid 2x_1 + x_2 \le 5\}$;

**б)** $M_2 = \{(x_1; x_2) \mid |x_1| + |x_2| \ge 1\}$;

**в)** $M_3 = \{(x_1; x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$.

Являются ли эти множества выпуклыми?

**4.2.** Доказать, что пересечение $M_1 \cap M_2$ выпуклых множеств $M_1$ и $M_2$ является выпуклым множеством.

**4.3.** Приведите пример выпуклых множеств $M_1$ и $M_2$ таких, что их объединение $M_1 \cup M_2$ не является выпуклым множеством.

**4.4.** Что представляет собой на плоскости область, заданная системой неравенств $3x_1 + x_2 \le 9$, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$? Построить эту область и определить ее угловые точки.

**4.5.** Что представляет собой на плоскости область, заданная системой неравенств $3x_1 + 5x_2 \le 30$, $x_1 \ge 0, x_1 - x_2 \ge 0$? Построить эту область и определить ее угловые точки.

**4.6.** Что представляет собой на плоскости область, заданная системой неравенств $3x_1 + x_2 \ge 9$, $2x_1 + 5x_2 \ge 20$, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$? Построить эту область и определить ее угловые точки. Является ли эта область ограниченной?

**4.7.** Пусть $M$ – выпуклая оболочка системы точек $A_1 = (3,8)$, $A_2 = (5,8)$, $A_3 = (3,10)$, $A_4 = (3,\frac{41}{5})$, $A_5 = (4,\frac{17}{2})$. Построить область $M$ на плоскости и задать ее системой неравенств.

**4.8.** Имеются три сплава $A, B, C$. Сплав $A$ содержит 80% золота и 10% серебра, $B$ – 70% золота и 30% серебра, $C$ – 50% золота и 20% серебра. Можно ли из этих сплавов составить новый сплав, содержащий 60% золота и 30% серебра?