Глава 4

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

4.1. Разностные уравнения

Основная область применения разностных уравнений – приближенное решение дифференциальных уравнений. Кроме того, их можно использовать для нахождения общего члена последовательности, заданной рекуррентным соотношением.

Основные понятия

Уравнение вида

$F(n; x_n; x_{n+1}; ...; x_{n+k}) = 0,$

где k – фиксированное, а n – произвольное натуральные числа, $x_n; x_{n+1}; ...; x_{n+k}$ – члены некоторой неизвестной числовой последовательности, называется *разностным уравнением порядка* k.

Решить разностное уравнение означает найти все последовательности (x_n), удовлетворяющие этому уравнению.

Общим решением разностного уравнения k-го порядка называется его решение $x_n = \varphi(n, C_1, C_2, ..., C_k)$, зависящее от k независимых произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Количество k постоянных равно порядку разностного уравнения, а независимость означает, что ни одно из постоянных нельзя выразить через другие.

Если в общем решении разностного уравнения произвольным постоянным придать конкретные числовые значения, то полученное решение называется *частным решением* разностного уравнения.

Рассмотрим линейное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами:

$$a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + ... + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = f_n, \qquad (1)$$

где $a_i \in \mathrm{R}\,(a_k \neq 0, a_0 \neq 0)$ и $\{f_n\}$ – заданные числа и последовательность.

Составим соответствующее однородное уравнение:

$$a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \ldots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0. \qquad (2)$$

Теорема 1 (об общем решении неоднородного уравнения). *Общее решение x_n линейного неоднородного разностного уравнения является суммой частного решения x_n^* этого уравнения и общего решения $\overline{x}_n$ соответствующего ему однородного уравнения.*

Теорема 2 (об общем решении однородного уравнения). *Пусть $x_n^1, \ldots, x_n^k$ – система, состоящая из k линейно независимых решений линейного однородного разностного уравнения. Тогда общее решение этого уравнения задается формулой: $x_n = C_1 x_n^1 + \ldots + C_k x_n^k$.*

Множество решений линейного однородного разностного уравнения k-го порядка образует k-мерное линейное пространство, а любой набор $x_n^1, \ldots, x_n^k$ из k линейно независимых решений (называемый *фундаментальным набором*) является его базисом. Признаком линейной независимости решений $x_n^1, \ldots, x_n^k$ однородного уравнения является неравенство нулю *определителя Казоратти*

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots & x_n^{(k)} \\ x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} & \ldots & x_{n+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+k}^{(1)} & x_{n+k}^{(2)} & \ldots & x_{n+k}^{(k)} \end{vmatrix}.$$

Однородному уравнению (2) соответствует *характеристическое уравнение*

$$a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \qquad (3)$$

Общее решение однородного разностного уравнения является, как правило, линейной комбинацией геометрических прогрессий, связанных с корнями характеристического уравнения.

Продемонстрируем сказанное на примере уравнения 2-го порядка

$$a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0, \; a \neq 0, \; c \neq 0. \qquad (4)$$

Составим характеристическое уравнение:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \qquad (5)$$

Возможны три случая.

1. $D = b^2 - 4ac > 0$, тогда уравнение (5) имеет пару различных действительных корней λ_1, λ_2. В этом случае общее решение уравнения (4) записывается в виде: $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$.

2. $D = b^2 - 4ac = 0$, тогда уравнение (5) имеет один действительный двукратный корень λ. В этом случае общее решение уравнения (4) записывается в виде: $x_n = C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n = \left(C_1 + C_2 n\right)\lambda^n$.

3. $D = b^2 - 4ac < 0$, тогда уравнение (5) имеет пару комплексно сопряженных корней $\lambda_{1,2} = a \pm ib$. Представим эти корни в тригонометрической форме $\lambda_{1,2} = r\left(\cos\varphi \pm i \cdot \sin\varphi\right)$, где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль, φ – аргумент. В этом случае общее решение уравнения (4) записывается в виде

$$x_n = r^n\left(C_1\cos(n\varphi) + C_2\sin(n\varphi)\right).$$

Чтобы найти частное решение неоднородного линейного разностного уравнения, используется *метод неопределенных коэффициентов*, основанный на поиске решения, «похожего» по виду на неоднородность f_n из правой части уравнения (1). Более точно, справедлива следующая

Теорема (о частном решении).
Если неоднородность разностного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид $f_n = \rho^n(p_n\cos n\varphi + q_n\sin n\varphi)$, *где* p_n, q_n *– многочлены степени* $\le d$, *то существует частное решение* $x_n^* = n^m \cdot \rho^n(r_n\cos n\varphi + s_n\sin n\varphi)$, *где* r_n, s_n *– многочлены степени* $\le d$, *а* m *– кратность корня* $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *характеристического уравнения.*

Примеры

1. Решить линейное однородное разностное уравнение:

а) $x_{n+2} + 4x_{n+1} - 5x_n = 0;$

б) $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0;$

в) $x_{n+2} + 6x_{n+1} + x_n = 0.$

Решение.

а) Характеристическое уравнение $\lambda^2+4\lambda-5=0$ имеет корни: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-5$. Поэтому общее решение исходного уравнения имеет вид $x_n=C_1+C_2(-5)^n$.

б) Характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+4=0$ имеет два комплексно сопряженных корня $\lambda_1=1+\sqrt{3}i$ и $\lambda_2=1-\sqrt{3}i$, которые могут быть записаны в виде $\lambda_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $\lambda_2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, следовательно, общее решение имеет вид $x_n=2^n\left(C_1\cos\frac{\pi n}{3}+C_2\sin\frac{\pi n}{3}\right)$.

в) Характеристическое уравнение $\lambda^2+6\lambda+9=0$ имеет единственный действительный корень $\lambda=-3$. Следовательно, общим решением исходного уравнения является $x_n=(-3)^n(C_1+nC_2)$.

2. Найти частное решение разностного уравнения:

$$x_{n+2}-2x_{n+1}-3x_n=5\left((\pi-1)^2-4\right)\cdot\pi^n.$$

Решение.

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде: $x_n^*=A\cdot\pi^n$. Постоянную A находим подстановкой в заданное уравнение:

$$A\left(\pi^2-2\pi-3\right)\cdot\pi^n=5\left((\pi-1)^2-4\right)\cdot\pi^n,$$

$$A\left((\pi-1)^2-4\right)=5\left((\pi-1)^2-4\right),\ A=5.$$

Следовательно, $x_n^*=5\cdot\pi^n$ – частное решение исходного уравнения.

3. Решить линейное неоднородное разностное уравнение:

а) $x_{n+2}+2x_{n+1}-3x_n=64\cdot5^n$;

б) $x_{n+2}-8x_{n+1}+64x_n=49\cdot3^n$;

в) $x_{n+2}-8x_{n+1}+16x_n=9n+3$.

Решение.

а) Будем искать частное решение в виде $x_n^*=A\cdot5^n$. Подставляя это выражение в наше уравнение, получим $A(25+10-3)5n=64\cdot5n$. Следовательно, $A=2$, а значит, $x_n^*=2\cdot5^n$.

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, находим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Таким образом, общее решение уравнения имеет вид:

$$x_n = 2\cdot 5^n + C_1 + C_2(-3)^n.$$

б) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 8\lambda + 64 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 4 + 4\sqrt{3}i = 8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), \lambda_2 = 4 - 4\sqrt{3}i = 8\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Значит, общее решение $\overline{x}_n$ однородного уравнения записывается так: $\overline{x}_n = 8^n\left(C_1\cos\frac{\pi n}{3} + C_2\sin\frac{\pi n}{3}\right)$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $x_n^* = A\cdot 3^n$. Постоянную A находим подстановкой в исходное уравнение $9A - 8\cdot 3A + 64A = 49$, $A = 1$. Частное решение имеет вид $x_n^* = 3^n$. Таким образом, получаем общее решение исходного уравнения:

$$x_n = 8^n\left(C_1\cos\frac{\pi n}{3} + C_2\sin\frac{\pi n}{3}\right) + 3^n.$$

в) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. Значит, общее решение соответствующего однородного уравнения $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 0$ записывается в виде $\overline{x}_n = C_1 4^n + C_2 4^n \cdot n$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $x_n^* = An + B$. Постоянные A и B находим подстановкой в заданное уравнение:

$$9An + (-6A + 9B) = 9n + 3, \quad \begin{cases} 9A = 9 \\ -6A + 9B = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}.$$

Частное решение имеет вид $x_n^* = n + 1$. Таким образом, получаем общее решение исходного уравнения $x_n = C_1 4^n + C_2 4^n \cdot n + n + 1$.

Упражнения

107. Решите линейное однородное разностное уравнение:

а) $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = 0$;

б) $9x_{n+2} + 6x_{n+1} + x_n = 0$;

в) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 13x_n = 0$.

108. Найдите частное решение уравнения:

а) $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 18 \cdot 3^n$; **б)** $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 2^{n+1}$;

в) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 5$; **г)** $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n = 4 \cdot \pi^{-n}$.

109. *Признак арифметической прогрессии*. Проверьте, что решением задачи Коши $\begin{cases} x_{n+2} + x_n = 2x_{n+1} \\ x_1 = a,\ x_2 = a + d \end{cases}$ является арифметическая прогрессия $x_n = a + d(n-1),\ n = 1, 2, \ldots$

110. *Признак геометрической прогрессии*. Проверьте, что решением задачи Коши $\begin{cases} x_{n+2} \cdot x_n = x_{n+1}^2 \\ x_1 = b,\ x_2 = bq \end{cases}$ для положительных чисел b, q является геометрическая прогрессия $x_n = a \cdot q^{n-1},\ n = 1, 2, \ldots$

111. Докажите, что задача Коши $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$, где $f(x, y)$ – заданная функция, $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2$ (начальные условия) имеет единственное решение.

112. *Числа Фибоначчи*. Найдите общий член последовательности $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,\ x_1 = x_2 = 1$.

113. Докажите, что если $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$ – решения линейного неоднородного разностного уравнения (1), то их разность $x_n^{(1)} - x_n^{(2)}$ является решением соответствующего однородного уравнения (2).

114. Докажите, что если определитель Казоратти двух последовательностей $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$ отличен от 0, то они линейно независимы.

4.2. Модели экономической динамики с дискретным временем

На разностных уравнениях базируются некоторые модели экономической динамики с дискретным временем: модель Самуэльсона-Хикса, паутинная модель рынка, задача об определении текущей стоимости купонной облигации.

Модель Самуэльсона–Хикса

Модель делового цикла Самуэльсона-Хикса предполагает прямую пропорциональность объемов инвестирования приросту национального дохода (*принцип акселерации*), т.е.

$$I_t = V\left(X_{t-1} - X_{t-2}\right),$$

где коэффициент $V > 0$ – фактор акселерации, I_t – величина инвестиций в период t, X_{t-1}, X_{t-2} – величины национального дохода соответственно в $(t-1)$-ом и $(t-2)$-ом периодах. Предполагается также, что спрос на данном этапе C_t зависит от величины национального дохода на предыдущем этапе X_{t-1} линейным образом $C_t = aX_{t-1} + b$. Условие равенства спроса и предложения имеет вид $X_t = I_t + C_t$. Тогда приходим к *уравнению Хикса*

$$X_t = \left(a + V\right)X_{t-1} - VX_{t-2} + b.$$

Стационарная последовательность $X_t^* = c = const$ является решением уравнения Хикса только при $c = b(1-a)^{-1}$; множитель $\left(1-a\right)^{-1}$ называется *мультипликатором Кейнса* (одномерный аналог матрицы полных затрат).

Пример 1. Рассмотреть уравнение Хикса при условии, что $a = V = \frac{1}{2}$; $b = 5$. Какова динамика роста национального дохода?

Решение.

Уравнение принимает вид: $X_t - X_{t-1} + \frac{1}{2}X_{t-2} = 5$. Его частным решением будет стационарное решение $X_t^* = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} = 10$. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0$ равны $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Таким образом, общим решением соответствующего однородного уравнения является $\overline{X}_t = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t\left(\tilde{N}_1\cos\frac{t\pi}{4} + \tilde{N}_2\sin\frac{t\pi}{4}\right)$. Следовательно, общим решением уравнения будет $X_t = 10 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t\left(\tilde{N}_1\cos\frac{t\pi}{4} + \tilde{N}_2\sin\frac{t\pi}{4}\right)$. Значит, динамика роста носит колебательный характер с убывающей амплитудой.

Упражнения

115. Проверьте, что если стационарная последовательность $X_t^* = c$ является решением уравнения Хикса, то $c = b(1-a)^{-1}$.

116. Найдите национальный доход X_t и мультипликатор Кейнса $(1-a)^{-1}$ для модели Самуэльсона-Хикса при данных значениях параметров a, V, b:

а) $a = 0{,}5$; $V = 0{,}5$; $b = 8$; **б)** $a = 0{,}11$; $V = 0{,}89$; $b = 8{,}9$;
в) $a = 0{,}75$; $V = 0{,}25$; $b = 4$.

117. Исследуйте уравнение Хикса при $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$. В зависимости от фактора акселерации V опишите возможные типы динамики:
а) $V = 0{,}01$; **б)** $V = 1$; **в)** $V = 3$.

Паутинная модель рынка

Рассмотрим паутинную модель рынка. При этом предположим, что спрос и предложение задаются линейными функциями, но при этом спрос зависит от цены в данный момент времени, а предложение зависит от цены на предыдущем этапе, т.е.

$d_t = a - bp_t$ (*функция спроса*),

$s_t = m + np_{t-1}$ (*функция предложения*),

где a, b, m, n – положительные действительные числа. Таким образом, считая $s_t = d_t$, получаем линейное разностное уравнение $a - bp_t = m + np_{t-1}$ первого порядка с постоянными коэффициентами.

Пример 2. Найти последовательность цен p_t в паутинной модели рынка $a - bp_t = m + np_{t-1}$ при $a = 11$; $b = 5$; $m = 2$; $n = 4$; укажите равновесное состояние паутинной модели рынка, т.е. стационарное решение $p_t = p^* = const$ уравнения и опишите динамику цен.

Решение.

Уравнение принимает вид $11 - 5p_t = 2 + 4\,p_{t-1}$. Его частным решением будет стационарное решение $p^* = 1$. Корень характеристического уравнения $4\lambda + 5 = 0$ равен $\lambda = -0{,}8$. Таким образом, общим решением соответствующего однородного уравнения является $p_t = C(-0{,}8)t$. Следовательно, общим решением уравнения будет

$p_t = C(-0{,}8)t + 1$. Значит, последовательность (p_t) приближается к равновесному состоянию $p^* = 1$.

Упражнения

118. Найдите равновесное состояние паутинной модели рынка, т.е. стационарное решение $p_t = p^* = const$ уравнения $a - bp_t = m + np_{t-1}$.

119. Найдите последовательность цен p_t в паутинной модели рынка $a - bp_t = m + np_{t-1}$ при следующих значениях параметров a, b, m, n:

а) $a = 5;\ b = 0{,}8;\ m = 1;\ n = 1{,}2;$

б) $a = 10;\ b = 5;\ m = 1;\ n = 4;$

в) $a = 13;\ b = 2;\ m = 1;\ n = 2.$

120. Найдите общее решение уравнения $9 - 2p_t = 4 + 3p_{t-1}$ и опишите динамику цен.

Задача об определении текущей стоимости купонной облигации

Пусть F – номинальная стоимость купонной облигации (т.е. денежная сумма, выплачиваемая эмитентом в момент погашения, совпадающего с концом последнего купонного периода), K – величина купона (т.е. денежная сумма, выплачиваемая в конце каждого купонного периода), X_n – текущая стоимость облигации в конце n-го купонного периода, k – число купонных периодов (лет, кварталов, месяцев, если купон, т.е. оговоренный процентный доход по облигации выплачивается регулярно в конце каждого года, или квартала, или месяца соответственно) на которое выпускается облигация. Пусть также r – процентная ставка за один купонный период, выраженная в частях (предполагается, что она неизменна в течение всего срока обращения облигации). Вышеперечисленные величины связаны между собой следующими соотношениями, представляющими собой задачу Коши:

$$\begin{cases} X_{n+1} + K = (1 + r)X_n, \\ X_k = F. \end{cases}$$

Пример 3. Найти текущую стоимость X_n купонной облигации при $F = 8$; $K = 0{,}75$; $k = 5$; $r = 0{,}25$ и определить ее динамику.

Решение.

Уравнение принимает вид $X_{n+1} + 0{,}75 = 1{,}25\ X_n$. Его частным решением будет стационарное решение $p^* = K/r = 3$ – текущая стоимость бесконечной ренты. Корень характеристического уравнения $\lambda - 1{,}25 = 0$ равен $\lambda = 1{,}25$. Таким образом, общим решением соответствующего однородного уравнения является $X_n = C(1{,}25)^n$. Следовательно, общим решением уравнения будет $X_n = C(1{,}25)^n + 3$. Значит, последовательность X_n будет возрастающей, т.к. номинальная стоимость облигации выше стоимости бесконечной ренты.

Упражнения

121. **а)** Найдите равновесное решение $X_t = p^* = const$ задачи Коши $\begin{cases} X_{n+1} + K = (1+r)X_n, \\ X_k = F. \end{cases}$

б) Проверьте, что значение p^* совпадает с суммой, которую необходимо уплатить в настоящий момент, чтобы в течение бесконечно длительного времени получать сумму K через каждый промежуток времени t при процентной ставке r.

122. Найдите текущую стоимость X_n купонной облигации при следующих значениях параметров F, K, k, r (F – номинальная стоимость купонной облигации, K – величина купона, k – число купонных периодов, r – процентная ставка за один купонный период, выраженная в частях):

а) $F = 8$; $K = 0{,}75$; $k = 5$; $r = 0{,}25$;

б) $F = 5$; $K = 0{,}8$; $k = 3$; $r = 0{,}2$.

123. Решите задачу Коши $\begin{cases} X_{n+1} + K = (1+r)X_n \\ X_k = F \end{cases}$, связанную с определением текущей стоимости X_n купонной облигации. При каких условиях последовательность (X_n) является возрастающей?