Глава 3

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

3.1. Постановка задачи

Финансово-экономическая мотивировка

Начнем рассмотрение со следующей финансовой задачи.

Задача об инвестициях. Две компании, реализующие некий инвестиционный проект, должны разместить средства 40 и 60 (млрд руб.) в трех банках в размерах 20, 30 и 50 (млрд руб.) соответственно. При переводе денежных средств компанией K_i через банк B_j уплачивается комиссионный сбор в размере $c_{ij} \cdot 0{,}1\%$ от суммы перевода. Считая известной матрицу комиссии $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, найти план перевода инвестиций, при котором величина комиссионного сбора будет минимальной. Указать величину комиссии.

Всю информацию можно представить в виде таблицы.

Инвесторы	Банки			Размеры инвестиций
	B_1	B_2	B_3	
K_1	2 x_{11}	4 x_{12}	5 x_{13}	40
K_2	3 x_{21}	5 x_{22}	8 x_{23}	60
Банковские ограничения	20	30	50	100

Опишем математическую модель задачи об инвестициях. Пусть переменные x_{ij} обозначают размер средств, которые переводит i-ый инвестор j-му банку. Ясно, что $x_{ij} \geq 0 \quad i = \overline{1,2}; \quad j = \overline{1,3}$. Нетривиальные ограничения – это система линейных уравнений:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=40,\quad x_{21}+x_{22}+x_{23}=60, \quad \text{и} \quad x_{11}+x_{21}=20,\quad x_{12}+x_{22}=30,\quad x_{13}+x_{23}=50.$$

Целевая функция:

$$f(X)=2x_{11}+4x_{12}+5x_{13}+3x_{21}+5x_{22}+8x_{23}\to\min.$$

При решении указанной задачи ЛП важную роль играет матрица системы нетривиальных ограничений

$$A=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общая постановка задачи

Транспортная задача – задача ЛП, в которой требуется найти оптимальный план транспортировки (однородного) продукта из конечного числа пунктов поставки с заданными объемами производства в конечное число пунктов потребления с известными объемами потребностей при заданной стоимости перевозки единицы транспортируемого продукта между каждой парой пунктов поставки и потребления. Таким образом, *оптимальный план должен определять минимальную суммарную стоимость транспортировки, не превышая объем производства каждого из поставщиков и полностью покрывая потребности каждого из потребителей*.

Транспортная задача была впервые сформулирована Хитчкоком и с тех пор применяется для решения практических задач доставки и распределения однородных продуктов.

Математическая модель может быть описана следующим образом.

Пусть имеются m поставщиков $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и n потребителей $B_1, B_2, \ldots, B_n$ некоторого однородного продукта. Для i-го поставщика задан объем производства $a_i \ge 0$ ($i=\overline{1,m}$), а для j-го потребителя – объем потребления $b_j \ge 0$ ($j=\overline{1,n}$) и известна стоимость доставки единицы продукта $c_{ij} \ge 0$ из пункта производства i в пункт

потребления j. Переменные $x_{ij} \geq 0$ характеризуют объем перевозки между i-м поставщиком и j-м потребителем. Оптимальный план транспортировки соответствует минимуму линейной целевой функции

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях на потребление и поставку

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}, \ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Число базисных переменных в системе ограничений равно $m + n - 1$.

При целочисленных объемах производства и потребления транспортная задача обладает целочисленным оптимальным планом – это было впервые экспериментально подмечено Данцигом при применении симплекс-метода для решения данной задачи, что позволяет включить транспортную задачу в класс задач целочисленного линейного программирования. Специальные методы, разработанные для решения транспортной задачи, как и симплекс-метод позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить оптимальное решение.

Данные обычно представляют в виде *транспортной таблицы.*

Поставщики	Потребители						Запасы
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…	…

A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреб-ности	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	

Общее количество товара у поставщиков равно $\sum_{i=1}^{m} a_i$, а общая потребность в товаре в пунктах назначения есть $\sum_{j=1}^{n} b_j$. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, то такая задача называется *задачей с правильным балансом*, а ее модель – *закрытой*.

Критерий разрешимости транспортной задачи. *Транспортная задача разрешима только, если она имеет правильный баланс*.

В дальнейшем предполагается, если не оговорено противное, что рассматриваемая транспортная задача имеет правильный баланс.

3.2. Метод потенциалов

Поиск начального опорного плана

В основе решения транспортной задачи с правильным балансом лежит модифицированный симплекс-метод, состоящий из трех основных этапов: а) построение начального опорного плана, б) оценка плана, в) улучшение плана.

Начальным опорным планом называется план перевозок $X = \left(x_{ij}\right)$, который удовлетворяет всем ограничениям транспортной задачи.

Рассмотрим только один метод построения начального опорного плана – метод минимального тарифа, суть которого состоит в следующем. Начальный опорный план находят, заполняя не более чем $m+n-1$ клеток (по числу базисных переменных). Любое допустимое решение транспортной задачи можно записать в транспортную таблицу. Клетки транспортной таблицы, в которых находятся отличные от нуля (или базисные нулевые) перевозки, называются *занятыми*, остальные – *свободными*. Клетки таблицы нумеруются так, что клетка, содержащая перевозку x_{ij}, т.е. стоящая

в i-ой строке и j-ом столбце, имеет номер (i, j). Каждой клетке с номером (i, j) соответствует переменная x_{ij}. Выбор заполняемых клеток производят, ориентируясь на тарифы перевозок, а именно: на каждом шаге выбирают какую-нибудь клетку (i, j), отвечающую минимальному тарифу и помещают в нее максимально возможную перевозку x_{ij}. После этого удаляют либо столбец, либо строку в зависимости от соотношения $x_{ij} = b_j$ или $x_{ij} = a_i$.

1. Для задачи об инвестициях построить начальный опорный план методом минимального тарифа.

Решение.

Транспортная таблица имеет вид

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	4	5	40
A_2	3	5	8	60
b_j	20	30	50	100

1^0. Находим наименьший тариф (1,1) и записываем всю потребность $b_1 = 20$ в клетку (1,1), новый запас $a_1 = 40 - 20 = 20$. В правом нижнем углу стоит контрольное число – общий запас или общая потребность (они равны)

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2 **20**	4	5	20
A_2	3	5	8	60
b_j	–	30	50	80

2^0. Полагаем $x_{11} = 20$, удаляем столбец B_1

	B_2	B_3	a_i
A_1	4	5	20
A_2	5	8	60
b_j	30	50	80

3^0. Теперь наименьший тариф находится в клетке (1,2). Записываем весь запас $a_1 = 20$, т.е. полагаем $x_{12} = 20$, вычисляем новую потребность $b_1 = 30 - 20 = 10$ удаляем строку A_1

	B_2	B_3	a_i
A_2	5	8	60
b_j	10	50	60

4^0. Теперь наименьший тариф находится в клетке (2,2). Записываем потребность $b_2 = 10$ в клетку (2,2), т.е. $x_{22} = 10$, вычисляем новый запас $a_2 = 60 - 10 = 50$, удаляем столбец B_2

	B_3	a_i
A_2	8	50
b_j	50	50

5^0. Осталось заполнить одну клетку; полагаем, естественно, $x_{23} = 50$. Тем самым, опорное решение найдено и может быть записано в виде матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 \\ 0 & 10 & 50 \end{pmatrix}.$$

Замечание. В общем случае опорный план транспортной задачи состоит из $m + n - 1$ занятых клеток (число базисных переменных). Такой план называется *невырожденным*. Может оказаться, что число занятых клеток опорного плана меньше, чем $m + n - 1$ (некоторые базисные переменные равны 0) – *вырожденный* опорный план. В этом случае выбирается одна (или несколько) свободных клеток *с наименьшим тарифом*, которая в дальнейшем считается занятой с нулевой перевозкой.

Метод потенциалов

Метод потенциалов используется для оценки плана, он основан на следующей теореме.

Теорема. *Если допустимое решение* $X = \left(x_{ij}\right)\left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\right)$ *транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы поставщиков* $u_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ *и потребителей* $v_j\left(j = \overline{1,m}\right)$, *удовлетворяющие условиям*:

$u_i + v_j = c_{ij}$, если $x_{ij} > 0$,

$u_i + v_j \le c_{ij}$, если $x_{ij} = 0$.

Равенства $u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$ используются для нахождения потенциалов. Данная система уравнений имеет $m + n$ неизвестных $u_i, i = \overline{1,m}$ и $v_j, j = \overline{1,n}$. Число уравнений системы, как и число отличных от нуля координат невырожденного опорного решения, равно $m + n - 1$. Так как число неизвестных системы на единицу больше числа уравнений, то одно из них можно задать произвольно (как правило, его берут нулевым), а остальные найти из системы.

Неравенства $u_i + v_j \le c_{ij}$ при $x_{ij} = 0$ используется для проверки оптимальности опорного решения. Эти неравенства удобно записать в виде $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ при $x_{ij} = 0$.

Числа Δ_{ij} по-прежнему будем называть *оценками свободных клеток таблицы, не входящих в базис опорного решения*. В этом случае *признак оптимальности* можно сформулировать так же, как в симплекс-методе (для задачи на минимум): опорное решение является оптимальным, если для всех клеток таблицы оценки неположительные.

2. Является ли оптимальным опорный план, найденный в предыдущем примере?

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2 **20**	4 **20**	5	40
A_2	3	5 **10**	8 **50**	60
b_j	20	30	50	100

Решение.

Определим систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решим систему уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$, считая, что $u_1 = 0$. Находим последовательно v_1, v_2, u_2, v_3:

	$B_1, v_1 = 2$	$B_2, v_2 = 4$	$B_3, v_3 = 7$	a_i
$A_1, u_1 = 0$	2 **20**	4 **20**	5	40
$A_2, u_2 = 1$	3	5	8	60

		10	**50**	
b_j	20	30	50	100

Теперь вычислим оценки всех свободных клеток по формулам $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ при $x_{ij} = 0$:

$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 7 - 5 = 2$, $\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 1 + 2 - 3 = 0$

Поскольку $\Delta_{13} > 0$, то опорное решение не является оптимальным.

3.3. Алгоритм решения транспортной задачи

Оценки для свободных клеток транспортной таблицы используются для улучшения опорного решения. С этой целью находят клетку (*l, k*) таблицы, соответствующую $\max\left\{\Delta_{ij}\right\} = \Delta_{lk}$. Если $\Delta_{lk} \le 0$, то решение оптимальное. Если же $\Delta_{lk} > 0$, то для соответствующей клетки (*l, k*) строят цикл и улучшают решение, перераспределяя груз $t = \min\limits_{"-"}\left\{x_{ij}\right\}$ по этому циклу.

> ***Определение.*** *Циклом* называется такая последовательность клеток транспортной таблицы
> $(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \ldots, (i_k, j_1)$,
> в которой две и только две соседние клетки расположены в одной строке или столбце, причем первая и последняя клетки также находятся в одной строке или столбце.

Цикл изображают в транспортной таблице в виде замкнутой ломаной линии. В любой клетке цикла происходит поворот звена ломаной линии на 90°.

Простейшие циклы изображены на рис. 1, где кружком отмечены клетки таблицы, включенные в состав цикла. Цикл называется *означенным*, если его угловые клетки пронумерованы по порядку и нечетным клеткам приписан знак «+», а четным – знак «–» (рис. 2).

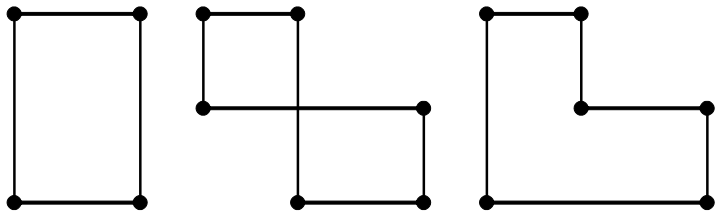

Рис. 1

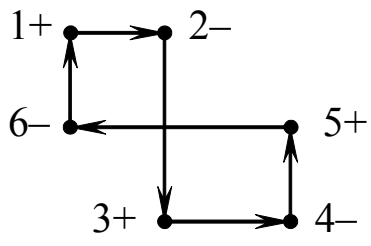

Рис. 2

Сдвигом по циклу на величину t называется увеличение объемов перевозок во всех нечетных клетках цикла, отмеченных знаком «+», на t и уменьшение объемов перевозок во всех четных клетках, отмеченных знаком «–», на t.

Сформулируем теперь *алгоритм решения задачи методом потенциалов*.

1. Построить начальное опорное решение методом минимального тарифа и проверить правильность его построения (количество занятых клеток должно быть $m + n - 1$). Если количество занятых клеток меньше, то некоторым свободным клеткам необходимо присвоить нулевые перевозки.

2. Записать систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решить систему уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$.

Чтобы найти частное решение этой системы, одному из потенциалов (обычно тому, для которого больше занятых клеток) придадим произвольно некоторое значение (как правило, нуль). Остальные потенциалы однозначно определяются по формулам:

$u_i = c_{ij} - v_j$ при $x_{ij} > 0$, если известен потенциал v_j, и

$v_j = c_{ij} - u_i$ при $x_{ij} > 0$, если известен потенциал u_i.

3. Проверить, выполняется ли условие оптимальности для свободных клеток таблицы. Для этого вычислить оценки свободных клеток по формулам:

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ при $x_{ij} = 0$,

и те оценки, которые больше нуля, записать в левые нижние углы клеток. Если для всех свободных клеток $\Delta_{ij} < 0$, то вычислить значение целевой функции и прервать процесс, так как полученное решение является оптимальным. Если же имеется хотя бы одна

клетка с положительной оценкой, то перейти к следующему пункту, поскольку опорное решение не является оптимальным.

4. Перейти к новому опорному решению, для которого значение целевой функции будет меньше. Для этого найти клетку таблицы, которой соответствует наибольшая положительная оценка $\max\limits_{\Delta_{ij}>0}\left\{\Delta_{ij}\right\}=\Delta_{lk}$.

Построить цикл, включающий данную клетку и часть клеток, занятых опорным решением. В клетках цикла расставить поочередно знаки «+» и «–», начиная с «+» в клетке с наибольшей положительной оценкой. Выполнить сдвиг по циклу на величину $t=\min\limits_{"-"}\left\{x_{ij}\right\}$. Клетка со знаком «–», в которой достигается $\min\limits_{"-"}\left\{x_{ij}\right\}$, остается пустой. Если минимум достигается в нескольких клетках, то одна из них остается пустой, а в остальных записываются базисные нули, чтобы число занятых клеток оставалось равным $m+n-1$. Затем перейти к п. 3

3. Найти методом потенциалов оптимальное решение задачи об инвестициях.

Решение.

Начинаем с таблицы, полученной при решении предыдущей задачи.

	$B_1, v_1=2$	$B_2, v_2=4$	$B_3, v_3=7$	a_i
$A_1, u_1=0$	2 **20**	4 **20**	5 $\boxed{2}$	40
$A_2, u_2=1$	3	5 **10**	8 **50**	60
b_j	20	30	50	100

1^0. Рассмотрим цикл $(1,3),(2,3),(2,2),(1,2)$. Вершинам цикла отвечают знаки +, –, +, –. Значит, $t=\min\limits_{"-"}\left\{x_{ij}\right\}=\min\left\{50,\,20\right\}=20$.

Переходим к новому опорному решению.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2 **20**	4	5 **20**	40

A_2	3	5 **30**	8 **30**	60
b_j	20	30	50	100

Вычисляем потенциалы $u_1 = 0,\ \ v_1 = 2,\ \ v_3 = 5,\ \ u_2 = 3,\ \ v_2 = 2$ и оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 2 - 4 = -2, \Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 3 + 2 - 3 = 2.$$

	$B_1, v_1 = 2$	$B_2, v_2 = 2$	$B_3, v_3 = 5$	a_i
$A_1, u_1 = 0$	2 **20**	4	5 **20**	40
$A_2, u_2 = 3$	3 $\boxed{2}$	5 **30**	8 **30**	60
b_j	20	30	50	100

Поскольку $\Delta_{21} > 0,$ то опорное решение не является оптимальным.

2^0. Рассмотрим цикл $(2,1),(2,3),(3,1),(1,1)$. Вершинам цикла отвечают знаки +, –, +, –. Значит, $t = \min\limits_{"-"}\{x_{ij}\} = \min\{30, 20\} = 20.$

Переходим к новому опорному решению.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	4	5 **40**	40
A_2	3 **20**	5 **30**	8 **10**	60
b_j	20	30	50	100

Вычисляем потенциалы: $u_2 = 0, v_1 = 3,\ v_2 = 5,\ v_3 = 8,\ u_1 = -3.$

	$B_1, v_1 = 3$	$B_2, v_2 = 5$	$B_3, v_3 = 8$	a_i
$A_1, u_1 = -3$	2	4	5 **40**	40
$A_2, u_2 = 0$	3 **20**	5 **30**	8 **10**	60
b_j	20	30	50	100

Теперь вычислим оценки всех свободных клеток:

$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -3 + 3 - 2 = -2,$

$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = -3 + 5 - 4 = -2.$

Поскольку оценки свободных клеток неположительны, то опорное решение является оптимальным. Оптимальное значение целевой функции равно

$f_{\min} = 5 \cdot 40 + 3 \cdot 20 + 5 \cdot 30 + 8 \cdot 10 = 490$ млн руб.

Размещение указанных средств происходит с комиссией $0,49\%$.

Упражнения

61. Для транспортной таблицы постройте опорное решение методом наименьшего тарифа:

а)	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	3	4	70
A_2	3	2	5	50
A_3	4	5	2	80
b_j	90	40	70	

б)	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	1	2	50
A_2	2	3	1	40
A_3	2	4	2	60
b_j	40	30	80	

в)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
b_j	120	50	190	110	

62. Используя метод потенциалов, проверьте оптимальность указанного опорного решения:

а)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2 **80**	80
A_2	1 **70**	4 **60**	5 **40**	9	170
A_3	9	8	7 **140**	10 **10**	150
b_j	70	60	180	90	400

б)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11 **70**	5	4	2	80
A_2	1	4 **50**	5 **120**	9	170
A_3	9	8	7 **60**	10 **90**	150
b_j	70	60	180	90	400

63. Для транспортной таблицы

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	8	1 **160**	2	160
A_2	4 **120**	5	9	8 **20**	140
A_3	9	2 **50**	3 **30**	6 **90**	170
b_j	120	50	190	110	

найдите оптимальное решение методом потенциалов, используя указанное начальное опорное решение.

64. Найдите оптимальное решение транспортной задачи:

а)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	8	6	9	2	160
A_2	7	16	12	12	60
A_3	6	15	8	3	180
b_j	80	60	60	200	

б)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	4	8	6	80
A_2	11	15	24	18	50
A_3	11	22	15	14	180
b_j	100	10	40	160	

в)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	10	4	8	90
A_2	14	25	13	23	60
A_3	12	13	6	12	140
b_j	80	40	90	80	

г)	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	10	8	8	160
A_2	11	29	14	18	80
A_3	11	26	16	25	70
b_j	100	70	30	110	

65. Найдите

а) ранг матрицы системы ограничений;

б) чюисло базисных переменных в системе ограничений транспортной задачи с параметрами $m = 2$, $n = 3$.

66. Постройте нецелое опорное решение транспортной задачи с параметрами $\vec{a} = (1; 4), \vec{b} = (2; 3)$.

67. Докажите, что если $\vec{a}, \vec{b}$ – двумерные векторы с целыми координатами, то оптимальное решение транспортной задачи с правильным балансом также является целым.