Глава 3

НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ И МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА

3.1. Число и вектор Фробениуса

Число и вектор Фробениуса используются в балансовых экономических моделях и, в частности, в модели международной торговли. Так, равновесный вектор национального дохода в модели международной торговли является вектором Фробениуса структурной матрицы международного обмена. Кроме того, один из критериев продуктивности матрицы формулируется в терминах числа Фробениуса.

Квадратная матрица A называется *неотрицательной*: $A \geq 0$, если ее элементы неотрицательны. Если все элементы матрицы A положительны, то она называется *положительной*, $A > 0$. Вектор $\vec{x}$ называется *положительным* (*неотрицательным*), если все его компоненты $x_i > 0$ (соответственно, $x_i \geq 0$).

Теорема Фробениуса–Перрона. *Для любой неотрицательной матрицы* $A \geq 0$ *существует собственное значение* $\lambda_A \geq 0$ (*называемое числом Фробениуса*) *такое, что* $\lambda_A \geq |\lambda|$ *для любого собственного значения* λ *матрицы* A. *Кроме того, существует неотрицательный собственный вектор* $\vec{x}_A \geq 0$, *соответствующий собственному значению* λ_A *и называемый вектором Фробениуса. Причем, если* $A > 0$, *то* $\lambda_A > 0$ *и* $\vec{x}_A > 0$.

Примеры

1. Найти число λ_A и вектор $\vec{x}_A$ Фробениуса матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Матрица A имеет два собственных значения: число Фробениуса $\lambda_A = 5$, которому соответствует собственный вектор $\vec{x}_A = t(1,1)^T$ (он является вектором Фробениуса для $t > 0$) и собственное значение $\lambda_2 = -1$ с собственным вектором $\vec{x} = t(-1,1)^T$ ($t \neq 0$). Очевидно, что выполняется неравенство $\lambda_A > |\lambda_2|$.

2. Пусть $\vec{x} > 0$ – собственный вектор матрицы $A \geq 0$. Доказать, что вектор $\vec{x}$ является вектором Фробениуса.

Доказательство. Поскольку матрицы A и A^T неотрицательны и имеют одни и те же собственные значения, то λ_A число Фробениуса для A^T. Пусть $\vec{p}_A$ – вектор Фробениуса матрицы A^T, т.е. $A^T \vec{p}_A = \lambda_A \vec{p}_A$ или $\vec{p}_A^T A = \lambda_A \vec{p}_A^T$. Вектор $\vec{p}_A$ называется левым вектором Фробениуса матрицы A.

По условию $\vec{x} > 0$ и $A\vec{x} = \alpha \vec{x}$. Умножим это равенство слева на вектор $\vec{p}_A^T$. Учитывая, что $\vec{p}_A^T A = \lambda_A \vec{p}_A^T$, имеем $\vec{p}_A^T A\vec{x} = \lambda_A \vec{p}_A^T \vec{x}$ или $\alpha \vec{p}_A^T \vec{x} = \lambda_A \vec{p}_A^T \vec{x}$. Поскольку $\vec{p}_A{}^T \vec{x} > 0$ (хотя бы одно из неотрицательных слагаемых в сумме $\vec{p}_A{}^T \vec{x}$ положительно), то $\lambda_A = \alpha$. А это и означает, что $\vec{x}$ есть вектор Фробениуса.

3. Известно, что сумма элементов любой строки (любого столбца) положительной матрицы A равна α. Найти число Фробениуса матрицы A.

Решение.

Пусть сумма элементов любой строки матрицы A равна α. Это можно записать в виде матричного равенства

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \ldots \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, положительный вектор $(1, \ldots, 1)$ является собственным вектором матрицы A, принадлежащей собственному значению α. Поэтому оно является числом Фробениуса матрицы A.

Упражнения

95. Проверьте, что вектор $(1; 2; 3)^T$ является собственным для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите ее число Фробениуса λ_A, вектор Фробениуса $\overset{1}{x}_A$.

96. Для данной матрицы A найдите число Фробениуса λ_A:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; **б)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

97. Найдите число и вектор Фробениуса данной матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2. Балансовые модели Леонтьева и продуктивность

Балансовые модели и продуктивные матрицы давно и прочно вошли в общепризнанный традиционный инструментарий экономического моделирования. Модель Леонтьева позволяет рассчитывать объемы валового выпуска по объему конечного потребления и наоборот. Понятия продуктивности и ее запаса позволяют оценивать границы производственных возможностей сложившихся или планируемых технологий. Модель равновесных цен позволяет, зная величины норм добавленной стоимости, прогнозировать цены на

продукцию отраслей. Она также позволяет прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены в отдельных отраслях.

Основные сведения

Балансовый анализ отвечает на следующий макроэкономический вопрос: каким должен быть валовой объем производства каждой из n отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в выпускаемом продукте.

Пусть весь производственный сектор разбит на n отраслей, каждая из которых производит однородный продукт. Рассмотрим *матрицу Леонтьева*

$$A = \left(a_{ij}\right),$$

где $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ – стоимость продукции отрасли i, затрачиваемой на производство 1 руб. продукции отрасли j, x_{ij} – объем продукции отрасли i, используемой в отрасли j, x_j – валовой выпуск отрасли j. Обозначим

$\vec{x} = \left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)^T$ – вектор валового выпуска всех отраслей,

$\vec{d} = \left(d_1, d_2, \ldots, d_n\right)^T$ – вектор конечного потребления.

Тогда уравнения межотраслевого баланса (*уравнение Леонтьева*) в матричной форме имеют вид:

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{d}.$$

Зная матрицу Леонтьева A и объемы конечного потребления $\vec{d}$, найдем планируемые объемы валового выпуска $\vec{x}$ всех отраслей народного хозяйства. Если матрица $\left(E - A\right)$ невырождена, то из уравнения межотраслевого баланса получим

$$\vec{x} = \left(E - A\right)^{-1}\vec{d}.$$

Матрица $H = \left(E - A\right)^{-1}$ называется *матрицей коэффициентов полных затрат*. Таким образом, основной результат балансового анализа можно представить в виде матричного равенства:

$$\vec{x} = H\vec{d},$$

где $\vec{d}$ – вектор конечного потребления, $\vec{x}$ – вектор валового выпуска.

Двойственной к модели Леонтьева является *модель равновесных цен*, описываемая равенством

$$\vec{p} = A^{\mathrm{T}}\vec{p} + \vec{v},$$

где $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор *цен* (p_i – цена единицы продукции i-ой отрасли), $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор *норм добавленной стоимости*.

Матрица $A \geq 0$ называется *продуктивной*, если для любого вектора $\vec{y} \geq 0$ существует решение $\vec{x} \geq 0$ уравнения Леонтьева $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}$.

Уравнение Леонтьева можно записать следующим образом:

$$(E - A)\vec{x} = \vec{y},$$

где E – единичная матрица. Если матрица $(E - A)^{-1}$ существует, то

$$\vec{x} = (E - A)^{-1}\vec{y}.$$

Первый критерий продуктивности. *Матрица $A \geq 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и неотрицательна.*

Второй критерий продуктивности. *Неотрицательная квадратная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше единицы.*

Следствие. *Если для неотрицательной матрицы A и некоторого положительного вектора $\vec{y}^*$ уравнение $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}^*$ имеет неотрицательное решение $\vec{x}^*$, то матрица A продуктивна.*

Пусть $A \geq 0$ – продуктивная матрица. *Запасом продуктивности* матрицы A назовем такое число $\alpha > 0$, что все матрицы λA, где $1 < \lambda < 1 + \alpha$, продуктивны, а матрица $(1 + \alpha)A$ непродуктивна.

Примеры

1. Пусть в двухотраслевой модели дана матрица Леонтьева

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}40 \\ 0{,}15 & 0{,}10 \end{pmatrix}$$

и вектор конечного потребления $\vec{d} = (75; 30)^T$.

а) Найти соответствующие объемы валового выпуска каждой отрасли.

б) Пусть надо удвоить выпуск конечного продукта первой отрасли. На сколько процентов должны измениться объемы валового выпуска каждой отрасли?

Решение.

а) Находим последовательно

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,95 & -0,40 \\ -0,15 & 0,90 \end{pmatrix},$$

$$H = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,795}\begin{pmatrix} 0,90 & 0,40 \\ 0,15 & 0,95 \end{pmatrix}.$$

Вектор валового выпуска находится по формуле:

$$\vec{x} = H\vec{d} = \frac{1}{0,795}\begin{pmatrix} 0,90 & 0,40 \\ 0,15 & 0,95 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 75 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, валовой выпуск первой отрасли равен 100, второй – 50.

б) Решение в этом случае отличается лишь тем, что изменяется вектор

$$\vec{d} = (150; 30)^T.$$

Поэтому

$$\vec{x} = H\vec{d} = \frac{1}{0,795}\begin{pmatrix} 0,90 & 0,40 \\ 0,15 & 0,95 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 150 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 184,9 \\ 64,2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, объем валового выпуска первой отрасли должен увеличиться примерно на 85%, второй отрасли – на 28,4%.

2. В трехотраслевой балансовой модели дана матрица Леонтьева

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

и вектор норм добавленной стоимости по каждой отрасли $\vec{v} = (4; 10; 4)$.

а) Найти равновесные цены;

б) Пусть произошло увеличение нормы добавленной стоимости первой отрасли на 1,11. На сколько процентов возрастут равновесные цены каждой отрасли?

Решение.

а) Для нахождения равновесных цен воспользуемся формулой $\vec{p} = H^T \vec{v}$,

где H – матрица полных затрат. Находим

$$H = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,2 \\ -0,3 & 0,8 & -0,2 \\ -0,2 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{0,444} \begin{pmatrix} 0,58 & 0,28 & 0,25 \\ 0,14 & 0,68 & 0,29 \\ 0,18 & 0,24 & 0,69 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\vec{p} = \frac{1}{0,444} \begin{pmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

б) Изменив вектор нормы добавленной стоимости, находим равновесные цены в этом случае

$$\vec{p} = \frac{1}{0,444} \begin{pmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5,11 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11,45 \\ 20,7 \\ 15,625 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, продукция первой отрасли подорожала на 14,5%, второй – на 3,5%, третьей – на 4,17%. Нетрудно также, зная объемы выпуска каждой отрасли, подсчитать инфляцию, вызванную этим повышением цен.

3. Исследовать на продуктивность матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,9 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Имеем:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,9 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

$$\left(E-A\right)^{-1}=\frac{1}{0,02}\begin{pmatrix}0,7 & 0,6\\ 0,9 & 0,8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35 & 30\\ 45 & 40\end{pmatrix}.$$

Эта матрица неотрицательна, следовательно, A продуктивна ввиду первого критерия продуктивности.

4. Показать продуктивность матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0,1 & 0 & 0,6\\ 0,2 & 0,7 & 0\\ 0,4 & 0,2 & 0,3\end{pmatrix}.$$

Решение.

Сумма элементов каждого столбца меньше единицы, значит, $\lambda_A<1$. Значит, A продуктивна ввиду второго критерия продуктивности.

5. Выяснить, при каких значениях $a>0$ матрица

$$\grave{A}=a\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 7 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

будет продуктивной. Является ли матрица A продуктивной при $a=0,1$?

Решение.

Характеристический многочлен матрицы A будет

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}a-\lambda & 2a & 0\\ 2a & a-\lambda & 0\\ 7a & 6a & 9a-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\left(9a-\lambda\right)\left(\left(a-\lambda\right)^2-4a^2\right)=\left(9a-\lambda\right)\left(\lambda^2-2a\lambda-3a^2\right),$$

а характеристическое уравнение: $\left(9a-\lambda\right)\left(\lambda^2-2a\lambda-3a^2\right)=0.$

Корни этого уравнения (собственные значения):

$\lambda_1=9a,\ \lambda_2=3a,\ \lambda_3=-a.$

Для продуктивности матрицы A, согласно второму критерию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $9a<1$, т.е.

$a < \frac{1}{9}$. Например, при $a = \frac{1}{10}$ получим продуктивную матрицу $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,7 & 0,6 & 0,9 \end{pmatrix}$.

6. Доказать, что запас продуктивности α матрицы A можно найти по формуле $\alpha = \lambda_A^{-1} - 1$.

Решение.

Если $\mu > 0$, то $\lambda_{\mu A} = \mu\lambda_A$, поскольку $\mathrm{Spec}(\mu A) = \mu \cdot \mathrm{Spec}(A)$. Тогда для $\alpha = \lambda_A^{-1} - 1$ имеем $\lambda_{(1+\alpha)A} = (1+\alpha)\lambda_A = \lambda_A^{-1}\lambda_A = 1$, т.е. матрица $(1+\alpha)A$ непродуктивна. Если $\lambda < 1+\alpha$, то матрица λA продуктивна.

7. Найти запас продуктивности матрицы $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,9 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Решение.

Найдем собственные значения матрицы $10A$, которые являются корнями ее характеристического многочлена $\lambda^2 - 5\lambda - 48$: $\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{217}}{2}$. Значит,

$$\lambda_A = \frac{5 \pm \sqrt{217}}{20} = 0,98655 \quad \text{и} \quad \lambda_A^{-1} = \frac{1}{0,98655} = 1,0136.$$

Тогда на основании предыдущей задачи

$$\alpha = \frac{20}{5 + \sqrt{217}} - 1 = 1,3637 \times 10^{-2} \approx 0,0014.$$

Запас продуктивности матрицы A равен 0,015. Мы видим, что матрица A находится где-то «на пределе» продуктивности.

Упражнения

98. Дана балансовая таблица в двухотраслевой модели

Производители	Потребители		Потребление	Валовой выпуск
	I	II		
I	15	60	25	100
II	25	5	20	50

Постройте структурную матрицу и рассчитать валовой выпуск на новый вариант потребления: $\vec{d} = (20, 25)$.

99. Предположим, что в предыдущей задаче мы хотим оценить загрязнение окружающей среды с помощью введения отрасли III, «выпуск» которой состоит в производстве загрязняющих веществ (на единицу объема выпуска каждой отрасли) согласно следующей таблице

Производители	Потребители		Потребление	Валовой выпуск
	I	II		
I	5	60	35	100
II	25	5	20	50
III	50	10	–	60

Рассчитайте выпуск загрязняющих веществ, соответствующий варианту потребления $\vec{d} = (45, 15)$.

100. Приведите пример продуктивной матрицы A, для которой одна из отраслей нерентабельна.

101. В двухотраслевой модели дана матрица Леонтьева A и вектор конечного потребления $\vec{d}$: $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,15 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = (90; 45)^T$.

а) Найдите соответствующие объемы валового выпуска каждой отрасли.

б) Пусть надо удвоить выпуск конечного продукта второй отрасли. На сколько процентов должны измениться объемы валового выпуска каждой отрасли?

102. Для трехотраслевой балансовой модели дана матрица Леонтьева A и вектор норм добавленной стоимости по каждой отрасли $\vec{v}$: $A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}=(10;2;6)$.

а) Найдите равновесные цены.

б) Пусть произошло увеличение нормы добавленной стоимости первой отрасли на 1,1. На сколько процентов возрастут равновесные цены каждой отрасли?

103. Используя первый критерий продуктивности матрицы, исследуйте на продуктивность матрицу A:

а) $A=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$.

104. Используя второй критерий продуктивности, установите продуктивность матрицы A:

а) $A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,5 \\ 0,3 & 0,8 & 0,2 \\ 0,5 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,7 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$.

105. Выясните, при каких значениях $a>0$ матрица A продуктивна:

$$A=a\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}?$$

106. Найдите с точностью до 10^{-4} запас продуктивности α матрицы A:

а) $A=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$.