Глава 3

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

3.1. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов (часто называемый МНК) обычно упоминается в двух контекстах. Во-первых, широко известно его применение в регрессионном анализе как метода построения моделей на основе зашумленных экспериментальных данных. При этом помимо собственно построения модели обычно осуществляется оценка погрешности, с которой были вычислены её параметры, иногда решаются и некоторые другие задачи. Во-вторых, МНК часто применяется просто как метод аппроксимации, без какой-либо привязки к статистике.

При решении различных экономических задач мы часто сталкиваемся с необходимостью обработки массивов экспериментальных данных. В частности, с необходимостью решения системы линейных уравнений (СЛУ)

$$AX = B, \tag{1}$$

где $A = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$, X – вектор-столбец из n неизвестных, т.е. $X^t = (x_1 \ldots x_n)$, а B – вектор-столбец из m элементов, т.е. $B^t = (b_1 \ldots b_m)$. Рассматриваемая СЛУ, как правило, несовместна, если в ней число уравнений превышает число неизвестных. Поэтому говорить о ее точном решении невозможно.

Невязкой системы $AX = B$ *по i-ой проекции* относительно вектора X называется разность $\delta_i = (a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) - b_i \ (i = \overline{1,m})$.

> ***Определение.*** *Вектором невязки системы* (1) относительно вектора x называется вектор $\delta = (AX - B)^t$.

Ошибкой $S(X)$ *системы* относительно вектора X называется квадрат длины (или нормы) вектора невязки, т.е. сумма квадратов невязок по всем проекциям, т.е. $S(X) = \delta_1^2 + \ldots + \delta_m^2$.

Отметим, что в евклидовом m-мерном точечном пространстве ошибка *S(x)* представляет собой квадрат расстояния между точками AX и B, где $B^t = (b_1 \ldots b_m)$ и

$$(AX)^t = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n).$$

Если $X^t = (x_1, \ldots, x_n)$ – точное решение системы (1), то вектор-столбец B есть линейная комбинация столбцов $A_1, \ldots, A_n$ матрицы A, где

$$A_1^t = (a_{11}, \ldots, a_{m1}), \ldots, A_n^t = (a_{1n}, \ldots, a_{mn}).$$

Если X – точное решение системы (1), то вектор-столбец B является линейной комбинацией столбцов $A_1, \ldots, A_n$ матрицы A, где

$$A_1^t = (a_{11}, \ldots, a_{m1}), \ldots, A_n^t = (a_{1n}, \ldots, a_{mn}).$$

В качестве приближенного решения системы (1) выбирается такая точка X, для которой ошибка $S(X)$ имеет наименьшее значение.

Наилучшее приближенное решение X^* системы (1) совпадает с точным решением системы:

$$\begin{cases} (A_1, A_1)x_1 + \ldots + (A_1, A_n)x_n = (A_1, B), \\ \qquad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ (A_n, A_1)x_1 + \ldots + (A_n, A_n)x_n = (A_n, B). \end{cases} \qquad (2')$$

В матричной форме эта система записывается в виде

$$A^t AX = A^t B \qquad (2)$$

Определение. СЛУ (2) (или (2')) называется *системой нормальных уравнений* для системы (1).

Теорема. Если столбцы матрицы A линейно независимы, то система нормальных уравнений (2) имеет единственное решение X^*, и это решение дает наименьшее значение функции $S(X) = |AX - B|^2$ суммы квадратов ошибок по проекциям СЛУ (1).

Доказательство этой теоремы можно найти в [10].

Приближенным решением системы (1) называется произвольный n-мерный вектор X, если при этом ошибка $S(X)$ не превосходит заранее заданного критического значения $\delta_{кр}$. *Псевдорешением* системы (1) называется вектор X, в котором ошибка $S(X)$ системы принимает свое наименьшее значение.

Если ошибка $S(X)$ при этом не превосходит заданной точности $\delta_{кр}$, то *псевдорешение* является наилучшим приближенным решением системы (1). Теорема гарантирует существование и единственность псевдорешения системы (1) в достаточно общем случае. Тот факт, что ошибка $S(X)$ представляет собой сумму квадратов ошибок по всем проекциям объясняет название метода наименьших квадратов.

3.2. Применение метода наименьших квадратов

На практике метод наименьших квадратов (МНК) часто используется при анализе статистических данных для выявления функциональной зависимости между несколькими наблюдаемыми величинами. Ограничимся случаем двух величин x и y, между которыми предполагается наличие функциональной связи $y = P(x)$,

где $P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_k x^k$ – многочлен степени k.

При этом мы считаем, что число наблюдений, т.е. пар $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \ldots, n)$ экспериментальных данных не менее, чем число k + 1 неизвестных коэффициентов многочлена. В этом случае при решении СЛУ

$$\begin{cases} p_0 + p_1 x_1 + \ldots + p_k x_1^k = y_1, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ p_0 + p_1 x_n + \ldots + p_k x_n^k = y_n. \end{cases}$$

используется метод наименьших квадратов. Матрица коэффициентов системы при этом имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^k \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^k \end{pmatrix}.$$

Пример. Пусть произведено n взвешиваний одного и того же драгоценного камня. Найти вес камня, используя метод наименьших квадратов.

Решение.

Исходная система имеет n уравнений с одним неизвестным x, где x – вес камня:

$$\begin{cases} x = b_1, \\ \quad \dots \quad , \\ x = b_n \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \right..$$

При $n \geq 2$ система, как правило, несовместна и $A^t = (1,1,\dots,1)$.

Система принимает вид $nx = b_1 + \dots + b_n$. Отсюда получаем

$x = \dfrac{b_1 + \dots + b_n}{n}$ – псевдорешение исходной системы.

Если между величинами существует линейная зависимость $y = \alpha + \beta x$ и проведено n измерений (x_i, y_i), где $i = \overline{1,n}$, то МНК позволяет получить приближенную линейную зависимость $y = \alpha * + \beta * x$.

Пусть известно, что $y = \alpha + \beta x$ и проведено n измерений (x_i, y_i), где $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда для определения параметров α и β имеем СЛУ:

$$\begin{cases} \alpha + \beta x_1 = y_1, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad , \\ \alpha + \beta x_n = y_n. \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Система нормальных уравнений для (3) принимает вид

$$\begin{cases} n\alpha + \sum_1^n x_i\beta = \sum_1^n y_i \\ \sum_1^n x_i\alpha + \sum_1^n x_i^2\beta = \sum_1^n x_i y_i. \end{cases} \tag{4}$$

Решая систему (4), найдем

$$\beta^* = \frac{n\sum_1^n x_i y_i - \sum_1^n x_i \cdot \sum_1^n y_i}{n\sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2}.$$

Если ввести обозначения $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_1^n y_i$ – средние значения наблюдаемых величин, то первое уравнение примет вид $n\alpha + n\bar{x}\beta = n\bar{y}$. С учетом обозначений средних величин можно теперь записать решение системы (4) в виде формул

$$\begin{cases} \beta^* = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \\ \alpha^* = \bar{y} - \bar{x}\beta^*. \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, в случае линейной зависимости МНК дает линейное уравнение $y = \alpha^* + \beta^* x$, где коэффициенты α* и β* находятся по формулам (5).

Отметим, что в случае квадратичной (параболической) зависимости $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ система нормальных уравнений (2) принимает вид

$$\begin{cases} n\alpha + \sum_1^n x_i \cdot \beta + \sum_1^n x_i^2 \cdot \gamma = \sum_1^n y_i, \\ \sum_1^n x_i\alpha + \sum_1^n x_i^2 \cdot \beta + \sum_1^n x_i^3 \cdot \gamma = \sum_1^n x_i y_i, \\ \sum_1^n x_i^2\alpha + \sum_1^n x_i^3 \cdot \beta + \sum_1^n x_i^4 \cdot \gamma = \sum_1^n x_i^2 y_i. \end{cases} \tag{6}$$

3.3. Приближенное решение систем линейных уравнений и обусловленность матриц

Когда мы занимаемся задачей сглаживания экспериментальных данных, мы имеем дело, как правило, с несовместной СЛУ, в которой число неизвестных меньше числа уравнений. Для решения такой задачи часто применятся МНК. В результате мы получаем наилучшее приближенное решение исходной несовместной СЛУ. Следует отметить, что, имея дело с экспериментальными данными, мы имеем дело с приближенными числами. Поэтому в такой задаче важно уметь оценить, как сильно изменится решение исходной СЛУ, если каким-то образом изменится вектор-столбец свободных членов или исходная матрица коэффициентов СЛУ. Для такой оценки вводится число обусловленности квадратной невырожденной матрицы. Отметим, что при использовании МНК решается система нормальных уравнений (2), матрица которой квадратная, симметрическая и невырожденная.

Определение. *Нормой матрицы A* называется такое число $\|A\|$, для которого верны следующие свойства:

1) $\|A\| > 0\ (A \neq 0)$; 2) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

3) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$; 4) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$; 5) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$;

где A, B – матрицы, x – вектор, λ – число.

Примерами норм матрицы $A = (a_{ij})$ являются следующие числа:

$$\|A\|_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} a_{ij}^2}{n}}; \qquad \|A\|_2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|; \qquad \|A\|_3 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

где $\|x\|, \|Ax\|$ – введенные ранее нормы (длины) векторов x и Ax.

Норма матрицы A называется *согласованной с нормой вектора*, если $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Всем перечисленным требованиям удовлетворяет, например, $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$, где a_{ij} – элементы матрицы A, или $\sum_{i,j} |a_{ij}|$, или $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, где $\|x\|, \|Ax\|$ – введенные ранее нормы (длины) векторов x и Ax.

Для согласованной нормы и единичной матрицы *E,* очевидно, имеем *Ex=x* для любого вектора *x* линейного пространства *L,* и, следовательно, $\|E\| = 1$. Рассмотрим СЛУ $Ax = b$, где *A* – квадратная матрица порядка *n,* $\det A \neq 0, b \neq 0$. В этом случае система имеет единственное ненулевое решение *x.* На практике при решении СЛУ вычисления производятся с округлениями, т.е. неточно. Погрешность вычислений при этом часто можно интерпретировать как погрешность правой части. Рассмотрим, наряду с СЛУ $Ax = b$, систему $A(x + \delta x) = b + \delta b$, где $\delta b \neq 0$ – погрешность правой части, а δx – погрешность решения. Из двух последних равенств вытекает $A\delta x = \delta b$ и $\delta x = A^{-1}\delta b$. В силу свойств нормы матрицы имеем, что $\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ и $\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$. Перемножая эти неравенства, получим $\|b\| \cdot \|\delta x\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\| \cdot \|x\|$. Разделив последнее неравенство на $\|x\| \cdot \|b\| \neq 0$, имеем $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}$.

> ***Определение.*** Если *A* – невырожденная квадратная матрица, то число $c(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ называется *числом обусловленности* матрицы *A*.

С учетом определения числа обусловленности последнее неравенство можно переписать в виде

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq c(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}. \tag{7}$$

Неравенство (7) дает оценку относительной погрешности вектора решения x в зависимости от вектора-столбца свободных членов b. Отметим, что число обусловленности так же важно, если матрица *A* имеет погрешность, а вектор b известен точно. В самом деле, решим систему $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$.

Тогда $x + \delta x = (A + \delta A)^{-1} b$ и из $x = A^{-1} b$. Вычитая из первого равенства второе, получим

$$\delta x = ((A + \delta A)^{-1} - A^{-1}) b.$$

Введем обозначение $B = A + \delta A$ и используем тождество

$$A^{-1}(A - B)B^{-1} = A^{-1}AB^{-1} - A^{-1}BB^{-1} = EB^{-1} - A^{-1}E = B^{-1} - A^{-1}.$$

Далее имеем

$$\delta x = (B^{-1} - A^{-1})b = (A^{-1}(A - B)B^{-1})b =$$
$$= -A^{-1}\delta A(A + \delta A)^{-1})b = -A^{-1}\delta A(x + \delta x).$$

Отсюда

$$\|\delta x\| \le \left\|-A^{-1}\right\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|x + \delta x\|,$$

т.е. $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\delta A\|$. Домножив и разделив правую часть последнего неравенства на $\|A\|$, получим

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \le c(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}, \tag{8}$$

т.е. неравенство, аналогичное неравенству (7).

Для вычисления евклидовой нормы матрицы и ее числа обусловленности используют две следующие теоремы.

Теорема. Евклидова норма матрицы *A,* согласованная с евклидовой нормой векторов, равна

$$\|A\| = \max_i \sqrt{\left|\lambda_i(A^t A)\right|}. \tag{9}$$

Для симметрической матрицы формула (9) упрощается

$$\|A\| = \max_i \left|\lambda_i(A)\right|. \tag{10}$$

Здесь через $\lambda_i(B)$ обозначены собственные значения матрицы *B*.

Теорема. Если матрица *A* симметричная, то число обусловленности матрицы можно вычислить по формуле

$$c(A) = \frac{\max_i \left|\lambda_i\right|}{\min_j \left|\lambda_j\right|}. \tag{11}$$

Если матрица *A* не является симметричной, то число обусловленности равно

$$c(A) = \sqrt{c(A^t A)}. \tag{12}$$

Примеры

1. Пусть имеются следующие экспериментальные данные о цене нефти и индексе нефтяных компаний:

x	17,30	17,08	18,30	18,80	19,20	18,50
y	537	534	550	555	560	552

Считая, что между величинами x и y существует линейная зависимость, применяя метод наименьших квадратов (МНК), найти эту зависимость.

Решение.

Найдем необходимые для расчетов средние величины $\overline{x}, \overline{y}, \overline{xy}, \overline{x^2}$. Запишем результаты этих вычислений в виде таблицы.

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
1	17,28	537	9279,36	298,5984
2	17,05	534	9104,70	290,7025
3	18,30	550	10065,00	334,8900
4	18,80	555	10434,00	353,44
5	19,20	560	10752,00	368,64
6	18,50	552	10212,00	342,25
$\sum$	109,13	3288	59847,06	1988,5209
$\overline{s}$	18,188	548	9974,51	331,4202

Используя формулы (5), получим $\beta^* \approx 12{,}135$, $\alpha^* \approx 327{,}29$.

2. По экспериментальным данным

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y_i	0,50	0,30	0,25	0,18	0,12

построить с помощью МНК линейную зависимость y от x. Сравнить полученную зависимость с зависимостью $y = 2^{-x}$.

Решение.

Найдем необходимые для расчетов средние величины $\overline{x}, \overline{y}, \overline{xy}, \overline{x^2}$. Запишем результаты этих вычислений в виде таблицы.

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
1	1,0	0,50	0,50	1,0
2	1,5	0,30	0,45	2,25
3	2,0	0,25	0,50	4,0
4	2,5	0,18	0,45	6,25
5	3,0	0,12	0,36	9,0
$\sum$	10	1,35	2,26	22,5
$\bar{s}$	2	0,27	0,452	4,5

Используя формулы (5), получим $\beta^* \approx -0{,}176$; $\alpha^* \approx 0{,}622$. Следовательно, НМК дает зависимость $y = 0{,}622 - 0{,}176x$. Сравним значения $S = \sum_{1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$ для найденной линейной и предложенной экспоненциальной зависимости. Запишем промежуточные результаты этих вычислений в виде таблицы.

i	x_i	y_i	2^{-x_i}	$(2^{-x_i} - y_i)^2$	$(0{,}622 - 0{,}176x_i - y_i)^2$
1	1,0	0,50	0,5	0	0,002916
2	1,5	0,30	0,3536	0,002873	0,003364
3	2,0	0,25	0,25	0	0,0004
4	2,5	0,18	0,1768	0,000010	0,000004
5	3,0	0,12	0,125	0,000025	0,000676
$\sum$	10	1,35	–	0,002908	0,00736

Итак, результаты вычислений дают $S_{лин} = 0{,}00736$, а $S_{эксп} = 0{,}002908$.

Ответ: $S_{лин} = 0{,}00736$, $S_{эксп} = 0{,}002908$; экспоненциальная зависимость лучше, чем линейная отражает экспериментальные данные.

3. Имеются следующие данные о расходах на производство и доходах от реализации в условных единицах

x_i	1	1,5	2,0	2,5	3,0
y_i	1,4	2,2	3,6	5,1	8,0

Найти квадратичную зависимость $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ с помощью МНК.

Решение.

Найдем необходимые для расчетов суммы $\sum_1^n x_i, \sum_1^n x_i^2, \sum_1^n x_i^3, \sum_1^n x_i^4, \sum_1^n y_i, \sum_1^n x_i y_i, \sum_1^n x_i^2 y_i$. Результаты вычислений приведем в таблице.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	1,0	1,4	1,0	1,0	1,0	1,4	1,4
2	1,5	2,2	2,25	3,375	5,0625	3,3	4,95
3	2,0	3,6	4,0	8,0	16,0	7,2	14,4
4	2,5	5,1	6,25	15,625	39,0625	12,75	31,875
5	3,0	8,0	9,0	27,0	81,0	24,0	72,0
$\sum$	10	20,3	22,5	55,0	142,125	48,65	124,625

В результате получим систему уравнений вида

$$\begin{cases} 5\alpha + 10\beta + 22,5\gamma = 20,3, \\ 10\alpha + 22,5\beta + 55\gamma = 48,65, \\ 22,5\alpha + 55\beta + 142,125\gamma = 124,625. \end{cases}$$

Решив систему методом исключения неизвестных, получим приближенный ответ $\alpha \approx 1,922; \beta \approx -1,696; \gamma \approx 1,229$.

Ответ: $\alpha \approx 1,922; \beta \approx -1,696; \gamma \approx 1,229$.

4. Найдите число обусловленности симметричной матрицы A и оцените относительную погрешность решения системы $A(x + \delta x) = b + \delta b$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \; \delta b = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,05 \\ 0,1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Находим собственные значения матрицы A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda - 15) = 0.$$

Корни характеристического уравнения равны $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2 + \sqrt{19} \approx 6{,}36$; $\lambda_3 = 2 - \sqrt{19} \approx -2{,}36$. Далее, $\max\limits_i |\lambda_i| = 2 + \sqrt{19}$, $\min\limits_i |\lambda_i| = 1$, $c(A) = 2 + \sqrt{19}$, $\|b\| = 6$, $\|\delta b\| = 0{,}15$. Отсюда по формуле (7) имеем

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le (2 + \sqrt{19}) \cdot \frac{0{,}15}{6} = 0{,}025(2 + \sqrt{19}) \approx 0{,}025 \cdot 6{,}36 \approx 0{,}159.$$

Ответ: $c(A) = 2 + \sqrt{19}$, $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le 0{,}159$.

5. Найдите число обусловленности матрицы A и оцените относительную погрешность решения системы $A(x + \delta x) = b + \delta b$, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \delta b = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}3 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вычисляем $A^t A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$. Находим собственные значения матрицы $A^t A$:

$$\left| A^t A - \lambda E \right| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 3 - \lambda & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 9\lambda + 3 = 0.$$

Корни характеристического уравнения равны $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 3 + \sqrt{6} \approx 5{,}45$; $\lambda_3 = 3 - \sqrt{6} \approx 0{,}55$.

Далее, $\max\limits_i |\lambda_i| = 3 + \sqrt{6}$, $\min\limits_i |\lambda_i| = 3 - \sqrt{6}$,

$$c(A^t A) = \frac{3 + \sqrt{6}}{3 - \sqrt{6}} = 5 + 2\sqrt{6}, \; c(A) = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \approx 3{,}146.$$

Далее, $\|b\| = \sqrt{14}$, $\|\delta b\| = \dfrac{\sqrt{14}}{10}$. Отсюда по формуле (7) имеем, что $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le 3{,}146 \cdot 0{,}1 \approx 0{,}315$.

Ответ: $c(A) = \sqrt{3} + \sqrt{2} \approx 3{,}146$, $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le 0{,}315$.

6. Оцените относительную погрешность решения системы $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \delta A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

В примере 5 уже было вычислено число обусловленности $c(A) = 2 + \sqrt{19} = \|A\|$. Находим теперь собственные значения матрицы δA:

$$|\delta A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 0{,}2 - \lambda & 0 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}2 - \lambda & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}4 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (0{,}2 - \lambda)(\lambda^2 - 0{,}6\lambda + 0{,}0675) = 0$$

Решая полученное характеристическое уравнение, получим собственные значения матрицы δA: $\lambda_1 = 0{,}2$; $\lambda_2 = 0{,}45$; $\lambda_1 = 0{,}15$. Используя формулу (8), получим оценку относительной погрешности решения системы:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \le (2 + \sqrt{19}) \frac{0{,}45}{(2 + \sqrt{19})} = 0{,}45.$$

Ответ: $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \le 0{,}45$.

Ряд наблюдений значений некоторого показателя, упорядоченный в зависимости от значений другого показателя, называют *динамическим* или *временным рядом*. Другими словами динамический ряд есть последовательность пар (t_i, y_i), в которой значения показателя t_i упорядочены по возрастанию.

Как правило, одним из показателей является время, которое часто обозначается условными моментами времени 1,2,3,… Отрезок динамического ряда, на котором значения показателя y_i изменяются монотонно, называется *трендом*.

Заметим, что систему нормальных уравнений можно упростить и уменьшить абсолютные значения величин, если перенести начало координат в середину динамического ряда. Если до переноса начала координат t равно 1,2,3,…, то после переноса получим: 1) для четного числа членов t' равно $\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots$, 2) для нечетного числа членов t' равно $\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots$. В этом случае формулы (5) упрощаются и коэффициенты линейного тренда могут быть вычислены по более простым формулам:

$$\alpha = \frac{\sum y_t}{n};\ \beta = \frac{\sum y_t t}{\sum t^2}. \qquad (13)$$

В случае параболического тренда в этом случае тоже имеются достаточно простые формулы для коэффициентов α, β и γ, а именно:

$$\alpha = \frac{\sum y_t}{n} - \frac{\sum t^2}{n\left\{\dfrac{(n\sum y_t t^2 - \sum t^2 \sum y_t)}{\left[n\sum t^4 - (\sum t^2)^2\right]}\right\}},$$

$$\beta = \frac{\sum y_t t}{\sum t^2},\ \gamma = \frac{(n\sum y_t t^2 - \sum t^2 \sum y_t)}{\left[n\sum t^4 - (\sum t^2)^2\right]}. \qquad (14)$$

7. По данным ежемесячных объемов выпуска продукции фирмы за 8 месяцев:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	3423	3321	3210	3122	3034	2940	2845	2739

рассчитать: **а)** коэффициенты α и β линейного тренда $y = \alpha + \beta t$ и прогноз на месяц вперед; **б)** коэффициенты α, β и γ параболического тренда $y = \alpha + \beta t + \gamma t^2$ и прогноз на месяц вперед.

Решение.

Для расчета коэффициентов линейного и параболического трендов воспользуемся выражениями, полученными из системы

нормальных уравнений. Перенесем начало координат (t'). Необходимые вычисления занесем в таблицу.

1. Линейный тренд.

t	t'	y_t	$(t')^2$	$y_t \cdot t$
1	–7	3423	49	–23961
2	–5	3321	25	–16605
3	–3	3210	9	–9630
4	–1	3122	1	–3122
5	1	3034	1	3034
6	3	2940	9	8820
7	5	2845	25	14225
8	7	2739	49	19173
Итого	0	24634	168	–8066

Вычислим коэффициенты линейного тренда по формулам:

$A = \Sigma\, y_t / n = 24\,634/8 = 3079{,}25$; $\beta = \dfrac{\sum y_t t}{\sum (t')^2} = -\dfrac{8066}{168} \approx -48{,}01$.

Таким образом, величина среднего уровня ряда при $t = 0$ составляет 3079,25, среднемесячное уменьшение выпуска продукции составляет 48,01.

Уравнение линейного тренда: $y = 3079{,}25 - 48{,}01t'$.

Прогноз на 9-й месяц составит: $y = 3079{,}25 - 48{,}01 \cdot 9 = 2647{,}16$.

2. Параболический тренд.

t	t'	y_t	$(t')^2$	$y_t t'$	$(t')^3$	$(t')^4$	$y_t (t')^2$
1	–7	342 333	49	–23961	–343	2401	167 727
2	–5	3321	25	–16605	–125	625	83 025
3	–3	3210	9	–9630	–27	81	28 890
4	–1	3122	1	–3122	–1	1	3122
5	1	3034	1	3034	1	1	3034
6	3	2940	9	8820	27	81	26460
7	5	2845	25	14225	125	625	71125
8	7	2739	49	19173	343	2401	134211
Итого	0	24634	168	–8066	0	6216	517594

Вычислим коэффициенты параболического тренда по формулам (3.34): $\alpha = 3077{,}05$; $\beta = -48{,}01$; $\gamma = 0{,}105$. Прогноз на 9-й месяц: $y_t = 3077 - 48{,}01 \cdot 9 + 0{,}105 \cdot 81 = 2653{,}47$.

Ответ: Уравнение параболического тренда: $y = 3077,05 - 48,01t' + 0,105(t')^2$. Прогноз на 9-й месяц: $y_t = 2653,47$.

8. В таблице приведены данные о доходности и рыночном индексе за 10 лет. Предполагая зависимость между доходностью r и рыночным индексом r_I линейной, найти эту зависимость $r = \alpha + \beta r_I$.

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r	10,8	2,2	6,2	–2,2	–0,4	4,9	–7,9	2,8	–0,02	4,9
r_I	6,6	0,2	2,5	3,9	0,4	8,4	2,6	0,2	0,7	4,5

Решение.

Система нормальных уравнений линейной зависимости имеет вид

$$\begin{cases} 10\alpha + 30\beta = 21,28, \\ 30\alpha + 163,32\beta = 121,696. \end{cases}$$

Решая систему, получим $\alpha = -0,24$, $\beta = 0,79$.

Ответ: $r = -0,24 + 0,79r_I$.

Упражнения и тестовые вопросы

3.1. Что такое вектор невязки для несовместной СЛУ относительно вектора *X*? Найти вектор невязки

для СЛУ $\begin{cases} 3x + 4y = 12, \\ 5x + 3y = 13, \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}$ относительно вектора *X* = (1,3; 2).

3.2. Как связаны между собой вектор невязки и ошибка несовместной СЛУ относительно вектора *X*? Пусть вектор невязки несовместной СЛУ относительно вектора *X* равен δ = (0,3;0,2;0,2;0,2;0,2). Чему равна ошибка *S*(*X*) этой СЛУ относительно вектора *X*?

3.3. Что такое система нормальных уравнений для несовместной СЛУ? Написать систему нормальных уравнений несовместной

СЛУ $\begin{cases} 3x + 5y = 10, \\ 5x + 3y = 12, \\ 2x + 7y = 11. \end{cases}$

3.4. Что называется числом обусловленности квадратной невырожденной матрицы? Указать формулы вычисления числа обусловленности матрицы в евклидовой норме в случае симметричной матрицы и в общем случае.

3.5. Найти наилучшее приближенное решение несовместной СЛУ с помощью метода наименьших квадратов (МНК)

$$\begin{cases} 2x+3y=8, \\ 4x+5y=12, \\ 5x+3y=9, \\ 3x+7y=14. \end{cases}$$

В ответе с точностью до 0,01 указать решение, вектор невязки δ, и длину вектора невязки.

3.6. Пусть x – цена на товар (усл.е.) и y – объем продаж товара.

x_i	4	5	6	7
y_i	200	170	140	130

Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость $y=\alpha+\beta x$, найти эту зависимость с помощью МНК. Вычислить вектор невязки δ и ошибку системы S.

3.7. По экспериментальным данным с помощью МНК постройте линейную зависимость $y=\alpha+\beta x$. Сравните эту зависимость с зависимостью $y=24+10x+0,3x^2$, сопоставляя их ошибки $S_{лин}$ и $S_{кв}$.

x_i	3	4	5	6
y_i	57	70	81	94

3.8. В результате исследования зависимости между сроком эксплуатации автомобиля и расходами на его ремонт получены следующие данные:

t, лет	1	2	3	4	5	6	7	8
S, тыс. руб.	120	140	230	370	445	570	655	770

Найдите

а) линейную зависимость $S=\alpha+\beta t$ стоимости ремонта автомобиля от срока его эксплуатации;

б) предполагаемую величину затрат на 10-ый год его эксплуатации.