Глава 2

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

2.1. Эллипс, гипербола, парабола

Определение. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 есть постоянная величина $2a$, превышающая расстояние между F_1 и F_2.

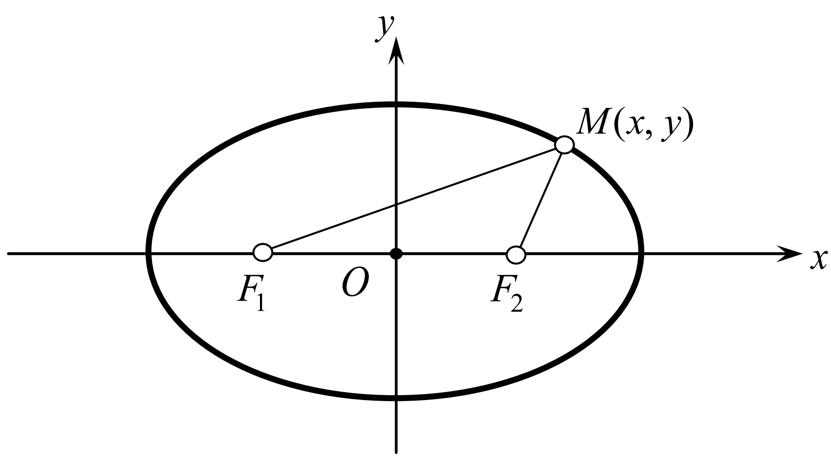

Рис. 2

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса, а расстояние $|F_1F_2|$ между ними – *фокальным расстоянием*, которое обозначается $2c$.

Пусть точка M принадлежит эллипсу. Отрезки F_1M и F_2M называются *фокальными радиусами точки* M. Пусть $|F_1F_2| = 2c$. По определению $a > c$. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат Oxy, в которой фокусы F_1 и F_2 расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат. В этой системе координат эллипс описывается *каноническим уравнением*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b=\sqrt{a^2-c^2}$. Параметры a и b называются соответственно *большой и малой полуосями эллипса*. *Эксцентриситетом эллипса* называется число ε, равное отношению половины его фокального расстояния к большой полуоси, т.е. $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Эксцентриситет эллипса удовлетворяет неравенствам $0\le\varepsilon<1$. Случай $c=0$ соответствует окружности, эксцентриситет окружности равен нулю.

Фокальные радиусы точки $M(x,y)$ эллипса могут быть найдены по формулам $r_1=a-\varepsilon x$, $r_2=a+\varepsilon x$.

Нормальное уравнение окружности имеет вид

$$(x-c)^2+(y-d)^2=R^2.$$

Определение. *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная $2a$. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* гиперболы, а расстояние между ними – *фокальным расстоянием*, которое обозначается $2c$.

Отрезки F_1M и F_2M называются *фокальными радиусами* точки $M(x,y)$ гиперболы.

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат Oxy, в которой фокусы F_1 и F_2 расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат.

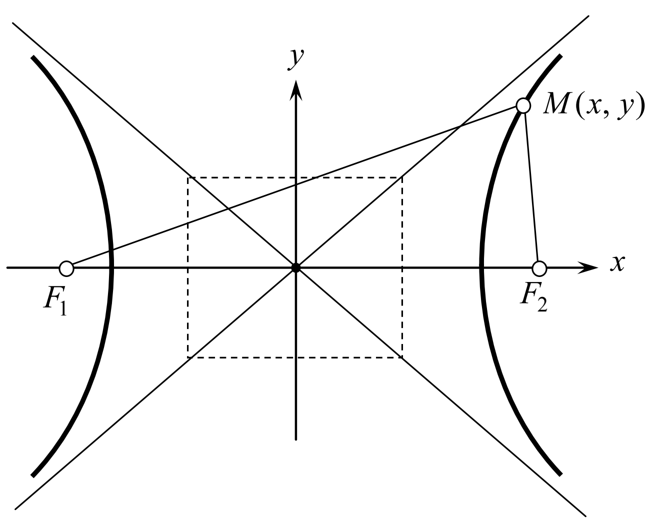

Рис. 3

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b=\sqrt{c^2-a^2}$. Числа a и b называются соответственно *действительной и мнимой полуосями* гиперболы. Внутри области, определяемой неравенством $\left|\frac{x}{a}\right| \le \left|\frac{y}{b}\right|$ точек гиперболы нет.

Определение. *Асимптотами гиперболы* называются прямые, заданные уравнениями $y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$.

Фокальные радиусы точки *M(x,y)* гиперболы могут быть найдены по формулам $r_1=\left|\varepsilon x-a\right|,\ r_2=\left|\varepsilon x+a\right|$.

Эксцентриситет гиперболы, как и для эллипса, определяется формулой $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Нетрудно проверить, что для эксцентриситета гиперболы верно неравенство $\varepsilon>1$.

Определение. *Параболой* называется множество всех точек плоскости, для которых расстояние до данной точки F равно расстоянию до данной прямой d, не проходящей через точку F.

Точка F называется *фокусом* параболы, а прямая d – *директрисой*. Расстояние от фокуса до директрисы называется *параметром* параболы и обозначается через p.

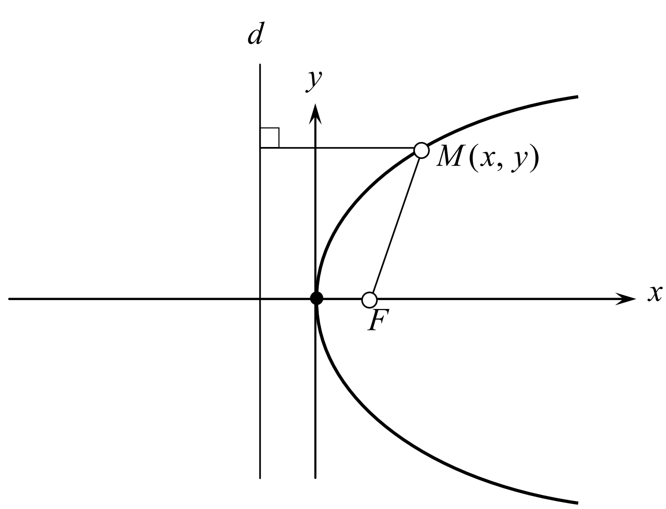

Рис. 4

Выберем начало O декартовой системы координат на середине отрезка FD, представляющего собой перпендикуляр, опущенный из точки F на прямую d. В этой системе координат фокус F имеет координаты $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а директриса d задается уравнением $x+\frac{p}{2}=0$.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2=2px.$$

Парабола симметрична относительно оси OF, называемой *осью параболы*. Точка O пересечения этой оси с параболой называется *вершиной* параболы. Фокальный радиус точки $M(x,y)$, т.е. ее расстояние до фокуса находится по формуле $r=x+\frac{p}{2}$.

2.2. Общее уравнение линии второго порядка

Линией второго порядка называется множество точек плоскости, координаты x и y которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0,$$

где $a_{11},a_{12},a_{22},a_{10},a_{20},a_{00}$ – некоторые действительные числа, причем a_{11},a_{12},a_{22} не равны нулю одновременно. Это уравнение называется *общим уравнением* кривой второго порядка и может быть также записано в векторной форме

$$(A\vec{x},\vec{x})+(\vec{b},\vec{x})+a_{00}=0,$$

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \vec{b}=(2a_{10};\ 2a_{20}),\ \vec{x}=(x;\ y).$

Поскольку $A^T=A$, то A – матрица квадратичной формы

$$f(\vec{x})=(A\vec{x},\vec{x})=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2.$$

Эллипс, гипербола и парабола являются примерами кривых второго порядка на плоскости. Кроме названных кривых существуют и другие виды кривых второго порядка, которые связаны с прямыми. Так, например, уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, где $a\neq 0, b\neq 0$, задает на плоскости *пару пересекающихся прямых*. Системы координат, в которых уравнение кривой принимает наиболее простой вид, называются *каноническими*. При помощи композиции преобразований: поворота осей на угол α, параллельного переноса начала координат в точку $(x_0; y_0)$ и отражения относительно оси абсцисс уравнение кривой второго порядка приводится к одному из канонических уравнений, основные из которых были перечислены выше.

Примеры

1. Составить каноническое уравнение эллипса с центром в начале координат и фокусами, расположенными на оси абсцисс, если известно, что его эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{2}{3}$ и точка $N(3;2)$ лежит на эллипсе.

Решение.

Уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Имеем, что $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{2}{3}$. Отсюда вычислим, что $a^2=\dfrac{9}{5}b^2$. Подставляя координаты точки $N(3;2)$ в уравнение, получим $\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1$ и далее $b^2=9$ и $a^2=\dfrac{81}{5}=16,2$. Следовательно, каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{16,2}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

2. Составить каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат и фокусами, расположенными на оси абсцисс, если даны точка $M_1(-5; 3)$ гиперболы и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Решение.

Каноническое уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Из равенства $\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ имеем $b^2=a^2$. Отсюда $\dfrac{25}{a^2}-\dfrac{9}{a^2}=1$ и $a^2=16$. Следовательно, каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

3. Найдите на параболе $y^2 = 10x$ точки, фокальный радиус которых равен 12,5.

Решение.

Заметим, что парабола расположена в правой полуплоскости. Если $M(x; y)$ лежит на параболе, то $x \geq 0$. Параметр $p = 5$. Пусть $M(x; y)$ – искомая точка, F – фокус, d – директриса параболы. Тогда $F(2,5; 0)$, d : $x = -2,5$. Поскольку $|FM| = \rho(M, d)$, то $x + 2,5 = 12,5$, $x = 10$, $y^2 = 100, y = \pm 10$. Итак, получили две точки.

Ответ: $M_1(10;10)$, $M_2(10;-10)$.

4. На правой ветви гиперболы, заданной уравнением $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, найдите точку, расстояние которой от правого фокуса в два раза меньше ее расстояния от левого фокуса.

Решение.

Для правой ветви гиперболы фокальные радиусы определяются формулами $r_1 = \varepsilon x - a$ и $r_2 = \varepsilon x + a$. Следовательно, получим уравнение $\varepsilon x + a = 2(\varepsilon x - a)$. Для данной гиперболы $a = 4$, $c = \sqrt{16+9} = 5$ и $\varepsilon = \frac{5}{4}$. Поэтому, $x = 9,6$. Отсюда имеем $y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16} = \pm\frac{3}{5}\sqrt{119}$.

Ответ: две точки $M_1\left(9,6; 0,6\sqrt{119}\right)$, $M_2\left(9,6; -0,6\sqrt{119}\right)$.

5. Найдите уравнение линии, для любой точки которой отношение расстояния до точки $F(3;0)$ к расстоянию до прямой $x - 8 = 0$ равно $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Указать название линии и ее параметры.

Решение.

Для произвольной точки $M(x; y)$ искомой линии верно равенство:

$$\frac{|FM|}{\rho(M,l)} = \frac{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}}{|x-8|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда имеем $2[(x-3)^2+y^2]=(x-8)^2$. Раскрыв скобки и произведя перегруппировку слагаемых, получим $(x+2)^2+2y^2=50$, т.е.

$$\frac{(x+2)^2}{50}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Ответ: искомая линия есть эллипс с центром в точке $C(-2;0)$ и полуосями $a=5\sqrt{2}$ и $b=5$.

6. Найдите уравнение гиперболы $x^2-y^2=8$ в новой системе координат $\left\{O(0;0);\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Решение.

Старые координаты $(x;y)$ и новые $(z;t)$ связаны матричным равенством

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} z+t \\ z-t \end{pmatrix}.$$

Значит, уравнение $x^2-y^2=8$ в новых координатах имеет вид

$$\left(\frac{z+t}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{z-t}{\sqrt{2}}\right)^2=8,\ zt=4.$$

Ответ: $zt=4$.

7. Привести кривую $\gamma: 4x^2-4xy+8x+y^2-4y+3=0$ к каноническому виду.

Решение.

Рассмотрим квадратичную форму $q(x,y)=4x^2-4xy+y^2$. Матрица $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ формы q имеет собственные значения 5 и 0 и соответствующие им ортонормированные векторы $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Перейдем к новой системе координат:

$$\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Выразим старые координаты $(x;\, y)$ через новые $(z;t)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{5} z + \dfrac{1}{5} t \\ \dfrac{1}{5} z + \dfrac{2}{5} t \end{pmatrix},$$

значит, $x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} z + \dfrac{1}{\sqrt{5}} t,\, y = \dfrac{1}{\sqrt{5}} z + \dfrac{2}{\sqrt{5}} t.$

Подставляя указанные выражения в уравнение кривой γ, получаем

$$0 = \left[4x^2 - 4xy + 8x + y^2 - 4y + 3 \right]_{x=-\frac{2}{\sqrt{5}}z+\frac{1}{\sqrt{5}}t,\, y=\frac{1}{\sqrt{5}}z+\frac{2}{\sqrt{5}}t} =$$

$$= 5z^2 - 4\sqrt{5}z + 3 = \left(z\sqrt{5}\right)^2 - 4\left(z\sqrt{5}\right) + 3 = \left(z\sqrt{5} - 1\right)\left(z\sqrt{5} - 3\right).$$

Значит, в новых координатах кривая γ задается уравнением

$$\gamma : \left(z - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)\left(z - \frac{3}{\sqrt{5}} \right) = 0.$$

Полагая $y' = z - \dfrac{2}{\sqrt{5}},\, x' = t$, получим

$$\gamma : \left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0,$$

откуда находим каноническое уравнение кривой $\gamma : y'^2 - \dfrac{1}{5} = 0$ в канонических координатах $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Заметим, что кривая γ является парой параллельных прямых.

Приложения к экономическим и финансовым задачам

8. Пусть Аня, Борис и Дмитрий имеют по 150 рублей на закупку фруктов. Известно, что 1 кг груш стоит 15 денежных единиц, а 1 кг яблок стоит 10 денежных единиц. При этом каждый из троих имеет свою функцию полезности, для которой он хочет обеспечить максимум при покупке. Пусть покупается x_1 кг груш и x_2 кг яблок. Эти функции полезности следующие: $u_A = x_1 + x_2$ для Ани, $u_B = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2$ для Бориса и $u_D = x_1 \cdot x_2$ для Дмитрия. Требуется найти для Ани, Бориса и Дмитрия план (x_1, x_2) покупки, при котором они обеспечивают максимум своей функции полезности.

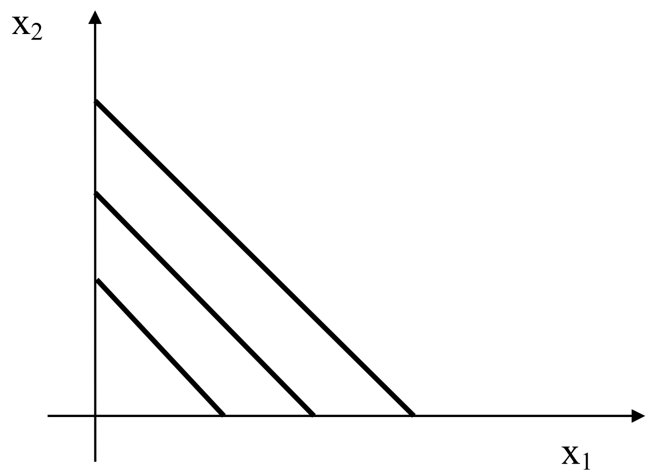

Рис. 5

Рассматриваемая задача может быть решена геометрически. Для решения данной задачи следует ввести понятие линии уровня.

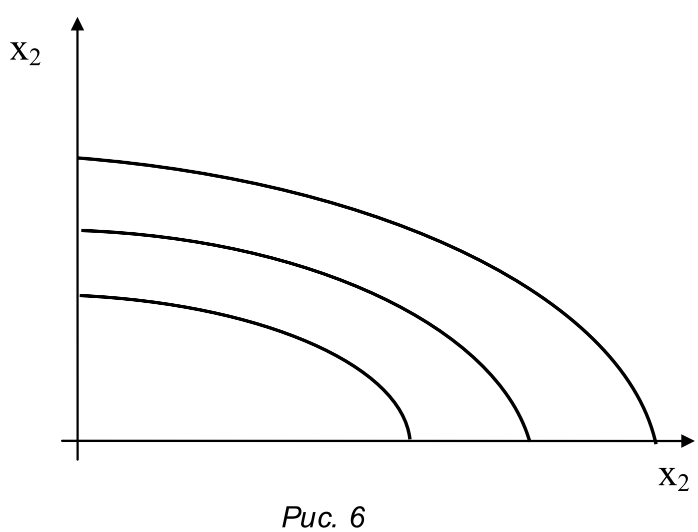

Рис. 6

Линией уровня функции $z = f(x,y)$ называется множество всех точек на плоскости, на котором функция сохраняет постоянное значение, равное h.

При этом для решения будут также использованы начальные представления о геометрических областях на плоскости, задаваемых линейными неравенствами (см. подраздел 1.4).

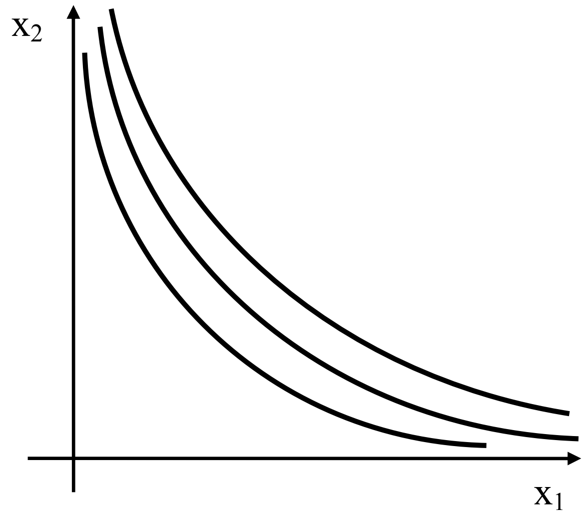

Рис. 7

Решение.

Линии уровня функций u_A, u_B и u_D представляют собой прямые, эллипсы и гиперболы для Ани, Бориса и Дмитрия, соответственно. По смыслу задачи считаем, что $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

С другой стороны, бюджетное ограничение записывается в виде неравенства $15x_1 + 10x_2 \leq 150$. Разделив на 10 последнее неравенство, получим $3x_1 + 2x_2 \leq 30$, или $\frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{15} \leq 1$. Нетрудно видеть что областью решений этого неравенства вместе с условиями неотрицательности является треугольник, ограниченный прямыми $x_1 = 0, x_2 = 0$ и $3x_1 + 2x_2 = 30$.

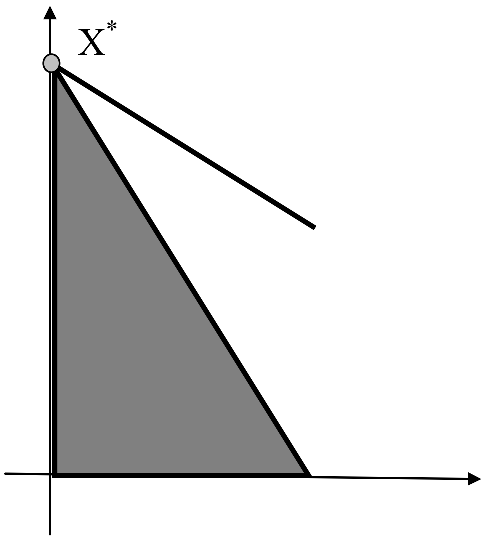

Рис. 8

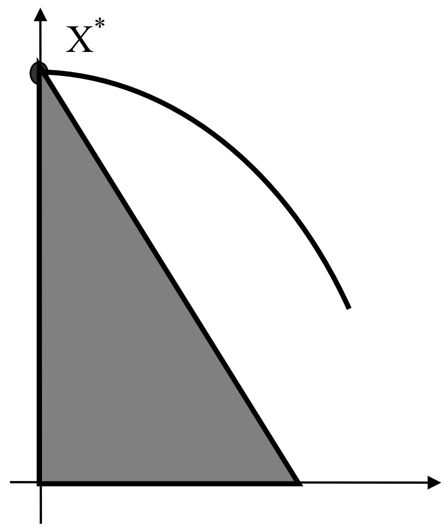

Рис. 9

Исходя из геометрических рисунков, легко теперь установить, что $u_{A\max} = u_A(0{,}15) = 15$, $u_{B\max} = u_B(0{,}15) = 225$ и $u_{D\max} = u_D(Q)$. Координаты точки Q касания гиперболы уровня стороны бюджетного треугольника требуется уже вычислить аналитически. Для этого заметим, что точка Q удовлетворяет трем уравнениям:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = h, \\ 3x_1 + 2x_2 = 30, \\ x'_2 = -\dfrac{h}{x_1^2} = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

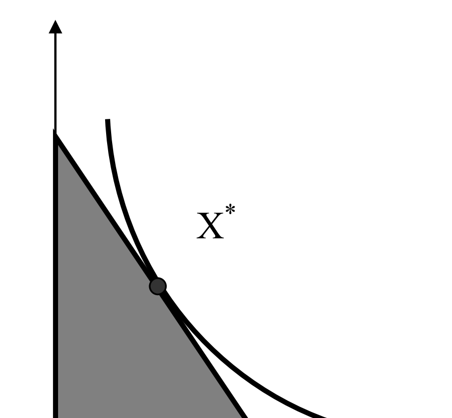

Рис. 10

Исключая из уравнений h, получим координаты точки $Q=(x_1,x_2)=(5;7,5)$.

Ответ: $Q=(x_1,x_2)=(5;7,5)$.

9. Нелинейная модель издержек и прибыли фирмы. Пусть фирма производит многоцелевое оборудование двух видов A и B в количестве x и y единиц продукции соответственно. При этом доходы фирмы за год выражаются *функцией доходов* $R(x,y)=4x+y$, а издержки на производство выражаются *функцией издержек* $C(x,y)=7,5+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}y^2$. Определить план производства (x,y), при котором фирма получает максимум прибыли.

Решение.

Функция прибыли составляется как разность между функцией доходов и функцией издержек:

$$\Pi(x,y)=R(x,y)-C(x,y)=4x+y-7,5-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}y^2.$$

Проделав преобразования, последнее выражение приведем к виду

$$\Pi(x,y)=9-\frac{1}{4}(x-8)^2-\frac{1}{2}(y-1)^2.$$

Линии уровня для функции прибыли имеют вид

$$9-\frac{1}{4}(x-8)^2-\frac{1}{2}(y-1)^2=h.$$

Каждая линия уровня $0\le h\le 9$ представляет собой эллипс с центром в начале координат. Из полученного выражения легко видеть, что максимум функции прибыли равен 9 и достигается при $x=8, y=1$.

Ответ: $x=8, y=1$.

Упражнения и тестовые вопросы

2.1. Напишите нормальное уравнение окружности. Найдите координаты центра и радиус окружности:

а) $x^2+y^2+8x-6y=0$; **б)** $x^2+y^2+10x-4y+13=0$.

2.2. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $M_1(1;2)$, $M_2(0;-1)$, $M_3(-3;0)$.

2.3. Дайте определение эллипса и напишите его каноническое уравнение. Напишите каноническое уравнение эллипса, если его эксцентриситет равен $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{3}}$, а большая полуось равна 12.

2.4. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что расстояние между его фокусами 2с = 24 и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{4}{5}$.

2.5. Приведите определение эксцентриситета эллипса. Найдите эксцентриситет эллипса, если его большая полуось в четыре раза больше малой.

2.6. Дайте определение гиперболы и напишите ее каноническое уравнение. Через точку $M(0;-0,5)$ и правую вершину гиперболы, заданной уравнением $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$, проведена прямая. Найдите координаты второй точки пересечения прямой и гиперболы.

2.7. Дайте определение эксцентриситета гиперболы. Напишите ее каноническое уравнение, если $a=12$, $b=5$. Чему равен эксцентриситет этой гиперболы?

2.8. Напишите уравнения асимптот гиперболы, заданной своим каноническим уравнением. Составьте уравнение гиперболы, если ее асимптоты заданы уравнениями $y=\pm\frac{3}{5}x$ и гипербола проходит через точку $M(10;-3\sqrt{3})$.

2.9. Дайте определение параболы и напишите ее каноническое уравнение. Составьте каноническое уравнение параболы, если ось абсцисс является ее осью симметрии, ее вершина лежит в начале координат и длина хорды параболы, перпендикулярной оси Ох, равна 8, а расстояние этой хорды от вершины равно 10.

2.10. На параболе $y^2=12x$ найдите точку, фокальный радиус которой равен 7.

2.11. Предложение и спрос на некоторый товар задаются функциями $p=4q-1$, $p=\frac{1}{q}+2$. Найти точку рыночного равновесия. Построить графики.

2.12. Андрей, Катя и Николай собираются купить апельсины и бананы. Покупается x_1 кг апельсинов и x_2 кг бананов. Каждый из троих имеет свою функцию полезности, которая показывает, насколько полезной он считает свою покупку. Эти функции полезности следующие: $u_A=4x_1+x_2$ для Андрея, $u_K=x_1^2+4x_2$ для Кати и $u_N=x_1\cdot x_2$ для Николая.

а) Постройте линии уровня функции полезности для значений уровня h=1, 2, 3.

б) Для каждого расположите в порядке предпочтения покупки $\vec{r}=(4,1)$, $\vec{s}=(3,8)$, $\vec{t}=(1,12)$.