Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. Задача линейного программирования (ЛП). Каноническая и стандартная формы задачи ЛП

Построение *математической модели* любой экономической задачи включает в себя следующие три этапа:

① выбор *переменных;*

② составление *системы ограничений*;

③ задание *целевой функции*.

Переменными задачи называются величины $x_1,..., x_n$, которые характеризуют исследуемый процесс. Их обычно записывают в виде координат точки (вектора) в n-мерном пространстве: $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Система ограничений – это система неравенств (или уравнений)

$$\vec{x} \in X \Leftrightarrow \left\{ g_1(\vec{x}) \geq 0, ..., g_m(\vec{x}) = 0, \right.$$

которым удовлетворяют переменные задачи и которые следуют из ограниченности ресурсов или других экономических или финансовых условий, например, условие неотрицательности переменных и т.п. Здесь через X обозначено множество решений указанной системы.

Целевой функцией $f(\vec{x})$ называют функцию от переменных задачи, которая характеризует качество выполнения задачи.

Общая задача математического программирования формулируется так: *найти экстремум целевой функции и соответствующие ему переменные при условии, что эти переменные удовлетворяют системе ограничений*, а ее математическая модель записывается в виде: $f(\vec{x}) \to \max\ (\min)$ при условии $\vec{x} \in X$.

Множество X называется *допустимым*, а любая его точка $\vec{x} \in X$ – *допустимым решением* (*планом*). Точка $\vec{x}^* \in X$, для которой $f(\vec{x}^*)$ – наибольшее (наименьшее) значение $f(\vec{x})$ на X, называется *оптимальным решением* (*планом*).

Если целевая функция и система ограничений *линейны*, то задача математического программирования называется задачей *линейного программирования* (сокращенно, ЛП).

Часто предполагается, что система ограничений содержит неравенства

$$x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0,$$

которые называются тривиальными ограничениями задачи.

Если нетривиальные ограничения системы являются уравнениями, то говорят о *канонической форме* задачи ЛП, если же в этой системе присутствуют только неравенства, то говорят о *стандартной форме* задачи ЛП.

Любая задача ЛП может быть сведена как к канонической, так и к стандартной форме.

Примеры

1. *Задача о банке*. Пусть собственные средства банка в сумме с депозитами составляют S млн долл. Часть этих средств, но не менее K млн долл., должна быть размещена в кредитах. Кредиты являются неликвидными активами банка, так как в случае непредвиденной потребности в наличности обратить кредиты в деньги без существенных потерь невозможно.

Другое дело ценные бумаги (особенно государственные). Их можно в любой момент продать, получив некоторую прибыль или, во всяком случае, без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные активы – ценные бумаги, чтобы компенсировать неликвидность кредитов. В нашем примере ликвидное ограничение таково: ценные бумаги должны составлять не менее p% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах.

Пусть x – средства (млн долл.), размещенные в кредитах, y – средства, вложенные в ценные бумаги. Имеем следующую систему линейных ограничений:

1) $x + y \leq S$ – балансовое ограничение;
2) $x \geq K$ – кредитное ограничение;

3) $y \geq 0{,}01p(x+y)$ – ликвидное ограничение;

4) $x \geq 0, \quad y \geq 0$.

Цель банка состоит в том, чтобы получить максимальную прибыль от кредитов и ценных бумаг: $z = c_1 x + c_2 y \to \max$ при условиях 1) – 4), где c_1 – доходность кредитов, c_2 – доходность ценных бумаг.

Так как кредиты менее ликвидны, чем ценные бумаги, то обычно $c_1 > c_2$. Мы пришли к задаче линейного программирования с ограничениями 1) – 4) и целевой функцией *f*, которую требуется максимизировать.

2. *Задача об оптимальном портфеле ценных бумаг.*

Пусть инвестирование денежных средств сопровождается получением ценных бумаг (активов): акций, облигаций, валюты, векселей и т.д.. Если денежные средства вложены в несколько объектов, то полученные от инвестирования ценные бумаги образуют *портфель активо*в. *Ожидаемая доходность портфеля* R, состоящего из n активов, определяется средневзвешенной доходностью его активов: $R = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$, где w_i – доля денежных средств, инвестированных в i-ый актив (*вес актива*), r_i – его ожидаемая доходность.

Инвестирование в ценные бумаги связано с *риском*, поскольку будущая стоимость ценных бумаг (в отличие от текущей) не определена и зависит от большого количества различных факторов. Под *риском портфеля* σ будем понимать количественную меру неопределенности будущей стоимости ценных бумаг. Определим риск портфеля, как средневзвешенный риск его активов: $\sigma = \sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i$, где σ_i – ожидаемый риск i-го актива. Пусть инвестор ставит цель сформировать портфель, приносящий максимальный доход при заданном уровне риска. Поскольку доход по каждому активу предопределен, то только веса w_i могут быть переменными, которые могут корректироваться для достижения цели.

Процедура оптимизации заключается в максимизации дохода по портфелю при ограничении максимального размера риска портфеля.

Определим оптимальные веса активов w_i, которые приведут к максимальному ожидаемому доходу R при условии заданного максимального уровня риска $\sigma_{\max}$. Эта задача может быть сформулирована следующим образом.

Ограничения на переменные задачи w_i связаны с тем, что:

1) риск портфеля не должен превышать заданного максимального риска;

2) в каждый актив обязательно должны быть проведены положительные инвестиции;

3) все средства должны быть полностью инвестированы.

Таким образом, ограничения имеют следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i \le \sigma_{\max},$$

где все активы могут иметь только неотрицательные веса $0 \le w_i \le 1$, причем $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, поскольку средства должны быть полностью инвестированы.

Целевая функция и критерий оптимизации имеют вид

$$R(w) = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i \to \max.$$

Математическая модель задачи о составлении оптимального портфеля ценных бумаг записывается в виде

$$\begin{cases} R(w) = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i \le \sigma_{\max} \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ 0 \le w_i \le 1, \quad i = 1, 2 \ldots n \end{cases}.$$

3. *Задача о заготовках*. Стальные прутья длиной 110 см требуется разрезать на заготовки длиной 50, 45, 30 см. Заготовок длиной 50 должно быть изготовлено не менее 20, длиной 45 – не менее 40, длиной 30 – не менее 60. Сколько прутьев и каким способом

следует разрезать, чтобы получить указанное количество заготовок при минимальных отходах?

Составить математическую модель этой задачи.

Решение.

Нетрудно перебрать все возможные варианты разреза:

Варианты разреза	Количество заготовок			Отходы
	50	45	30	
№ 1	2	–	–	10
№ 2	–	2	–	20
№ 3	–	–	3	20
№ 4	1	1	–	15
№ 5	1	–	2	0
№ 6	–	1	2	5

Пусть x_i – количество прутьев, разрезаемых по варианту с номером $i=\overline{1,6}$. Набор натуральных чисел $x_1, x_2, ..., x_6$ составляет план разреза. Из условий задачи вытекают следующие ограничения на неизвестные $x_1, x_2, ..., x_6$:

$$X: \begin{cases} 2x_1 + x_4 + x_5 \geq 20, \\ 2x_2 + x_4 + x_6 \geq 40, \\ 3x_3 + 2x_5 + 2x_6 \geq 60, \\ x_i \geq 0 \ \left(i = 1, 2, ..., 6\right). \end{cases}$$

Суммарное количество отходов описывается функцией

$f = 10x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 5x_6$.

В итоге приходим к следующей стандартной задаче ЛП:

$f\left(\vec{x}\right) \to \min$ при условиях $\vec{x} \in X$.

Сформулированную задачу можно привести к канонической форме. Это достигается введением дополнительных (балансовых) переменных x_7, x_8, x_9:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_4 + x_5 = 20 + x_7, \\ 2x_2 + x_4 + x_6 = 40 + x_8, \\ 3x_3 + 2x_5 + 2x_6 = 60 + x_9, \\ x_1, x_2, ..., x_9 \geq 0. \end{cases}$$

4. *Транспортная задача*. На двух складах $\tilde{N}_1$ и $\tilde{N}_2$ имеется 50 и 100 тонн товара соответственно. Потребности магазинов M_1, M_2, M_3 в товаре соответственно равны 30, 40, 80 тонн. Известны тарифы перевозок $\left(c_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 100 & 300 & 600 \\ 200 & 400 & 0 \end{pmatrix}$, где c_{ij} – стоимость в рублях перевозки одной тонны товара со склада $\tilde{N}_i$ в магазин M_j. Найти минимальный по стоимости план перевозки товара со складов в магазины.

Составить математическую модель этой задачи.

Решение.

Пусть x_{ij} – количество товара в тоннах, предназначенное к перевозке из *i*-го склада в *j*-й магазин. Набор чисел

$$\left(x_{ij}\right)=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

составляет план перевозок. Так как в данном случае суммарные запасы равны суммарным потребностям: 50 + 100 = 30 + 40 + 80, то с каждого склада должен быть вывезен весь товар. Это приводит к уравнениям

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=50,$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=100.$$

Поскольку потребность каждого магазина также должна быть удовлетворена, то имеем еще три уравнения:

$$x_{11}+x_{21}=30,$$

$$x_{12}+x_{22}=40,$$

$$x_{13}+x_{23}=80.$$

Очевидно также, что

$$x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23}\geq 0.$$

Суммарная стоимость всех перевозок задается линейной функцией

$$f=\sum c_{ij}x_{ij}=100(x_{11}+3x_{12}+6x_{13}+2x_{21}+4x_{22}).$$

В итоге имеем каноническую задачу линейного программирования: $f\left(\vec{x}\right)\to\min$ при указанных ограничениях.

5. Привести к стандартной форме задачу ЛП

$$f = 100(x_{11} + 3x_{12} + 6x_{13} + 2x_{21} + 4x_{22}) \to \min$$

при условиях

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 100, \\ x_{11} + x_{21} = 30, \\ x_{12} + x_{22} = 40, \\ x_{13} + x_{23} = 80, \end{cases} \quad \text{и} \quad x_{11},\, x_{12},\, x_{13},\, x_{21},\, x_{22},\, x_{23} \geq 0.$$

Решение.

Преобразуем систему уравнений методом Гаусса к виду

$$\begin{cases} x_{11} = 30 - x_{21}, \\ x_{12} = 20 - x_{13} + x_{21}, \\ x_{22} = 20 + x_{13} - x_{21}, \\ x_{23} = 80 - x_{13}, \end{cases}$$

с базисными неизвестными $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}$ и свободными неизвестными x_{21} и x_{13}. Учитывая неотрицательность неизвестных, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 30 - x_{21} \geq 0, \\ 20 + x_{21} - x_{13} \geq 0, \\ 20 - x_{21} + x_{13} \geq 0, \\ 80 - x_{13} \geq 0, \end{cases}$$

$$x_{21} \geq 0,\ x_{13} \geq 0.$$

Исключив базисные неизвестные, приведем целевую функцию к виду $f = 100(170 + 7x_{13})$. Таким образом, получаем задачу линейного программирования в стандартной форме, эквивалентную задаче в канонической форме.

Упражнения

Составьте математическую модель задачи линейного программирования:

1. *Задача об использовании ресурсов.* Для изготовления изделий двух видов имеется 100 кг сырья. На изготовление одного изде-

лия первого вида расходуется 2 кг сырья, а изделия второго вида – 4 кг. Составьте план производства, обеспечивающий получение наибольшей выручки от продажи изделий, если отпускная стоимость одного изделия первого вида составляет 3000 руб., а изделия второго вида – 2000 руб., причем изделий первого вида требуется изготовить не более 40, а изделий второго вида – не более 20.

2. *Задача о диете*. Известно, что 1 кг яблок стоит 30 руб., а 1 кг абрикосов 60 руб. Сколько яблок и абрикосов должен потреблять человек в сутки, чтобы получить не менее 70 мг витамина С и не менее 2 мг витамина А при минимальных затратах на яблоки и абрикосы? Содержание витаминов А и С в яблоках и абрикосах указано в таблице.

	А (мг/кг)	С (мг/кг)
Яблоки	1	70
Абрикосы	24	75

3. Стальные прутья длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 45 и 35 см. Требуемое количество заготовок данного вида составляет соответственно 40 и 30 штук. Определите, сколько прутьев по каждому из возможных способов следует разрезать, чтобы получить не менее необходимого количества заготовок каждого вида при минимальных отходах.

4. Чаеразвесочная фабрика выпускает чай сортов А и Б, смешивая три ингредиента: индийский, цейлонский и английский чаи. В таблице приведены нормы расхода ингредиентов, объем запасов каждого ингредиента и прибыль от реализации 1 т чая сортов А и Б.

Ингредиенты	Норма расхода (т/т)		Объем запасов (т)
	А	Б	
Индийский чай	0,5	0,2	600
Цейлонский чай	0,2	0,6	870
Английский чай	0,3	0,2	430
Прибыль от реализации одной тонны продукции (тыс. руб.)	320	290	

Требуется составить план производства чая сортов А и Б с целью получения максимальной прибыли.

5. Завод специализируется на капитальном ремонте автомашин типов А и В. Производственные мощности цехов приведены в таблице.

Название цехов	Количество машин за год	
	Типа А	Типа В
Кузовной	80	320
Шасси	110	110
Двигательный	240	120
Сборочный	160	80

Определите наиболее рентабельную производственную программу при условии, что прибыль от ремонта одной машины типов А и В соответственно равна 20 000 и 24 000 руб.

6. Для обеспечения перевозок нужно ежедневно формировать пассажирские и скорые поезда. В таблице указаны наличный парк вагонов разных типов, из которых комплектуются данные поезда, и количество пассажиров, вмещающихся в каждый из типов вагонов:

Поезда	Вагоны				
	Багажный	Почтовый	Плацкартный	Купейный	Спальный
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	–	8	4	1
Число пассажиров	–	–	58	40	32
Парк вагонов	12	8	81	70	26

Определите число скорых и пассажирских поездов, при которых количество перевозимых пассажиров достигает максимума.

7. Приведите задачу ЛП к канонической форме, добавив балансовые переменные:

а) $f = 20x_1 + 5x_2 + 30x_3 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + x_3 \geq 40, \\ 3x_2 + x_3 \geq 30; \end{cases}$

б) $f = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 8x_3 \leq 20, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 44, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 25. \end{cases}$

8. Приведите задачу ЛП к стандартной форме, исключив возможно большее число переменных:

а) $f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 0,5x_1 + 0,2x_2 \leq 6, \\ 0,2x_1 + 0,6x_2 \leq 8, \\ 0,3x_1 + 0,2x_2 + 0,1x_3 = 4; \end{cases}$

б) $f = 25x_{11} + 60x_{21} + 64x_{12} + 84x_{22} + 24x_{13} + 81x_{23} \to \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 80, \\ 2x_{11} + 3x_{21} = 200, \\ 2x_{12} + 3x_{22} = 100, \\ 2x_{13} + 3x_{23} = 100. \end{cases}$

9. Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ – оптимальные решения задачи ЛП: $f\left(\vec{x}\right) \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $A\vec{x} \leq \vec{b}$. Докажите, что отрезок $\left[\vec{x}_1, \vec{x}_2\right]$ целиком состоит из оптимальных решений данной задачи ЛП.

10. Известно, что точки A, B, C являются оптимальными решениями некоторой задачи линейного программирования. Докажите, что точка M также является оптимальным решением этой задачи:

а) $A(23; 8; 24)$, $B(3; 2; 4)$, $C(5; 5; 24)$, $M(7; 4; 14)$;

б) $A(7; 9; 7)$, $B(3; 2; 5)$, $C(1; 3; 4)$, $M(3; 4; 5)$;

в) $A(8; 2; 13)$, $B(1; 7; 5)$, $C(7; 9; 15)$, $M(5; 7; 11)$;

г) $A(9; 13; 17)$, $B(3; 11; 19)$, $C(5; 14; 16)$, $M(5; 13; 17)$.

11. Пусть A, B, C, D – точки в R^3, причем ни одна из них не содержится в плоскости, содержащей другие три точки. Доказать, что если точки A, B, C, D являются оптимальными решениями задачи линейного программирования

$f = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 \to \max$ при $\vec{x} = \left(x_1; x_2; x_3\right)^T \geq 0$ и $A\vec{x} \leq \vec{b}$,

то все допустимые решения являются оптимальными. Что можно сказать о целевой функции?

1.2. Графический метод решения задачи ЛП

Графический метод решения задачи ЛП в его непосредственной форме применяется только в случае двух переменных. Выпуклая многогранная область *X*, заданная системой линейных ограничений для двух переменных, является выпуклой многоугольной областью. Угловые точки множества *X* называются вершинами.

Пусть область допустимых решений *X* задается системой неравенств вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ge b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ge b_m, \end{cases}$$

а целевая функция имеет вид $f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_0$. Предположим, что требуется найти максимум (или минимум) z на множестве *X*, а также точку, в которой достигается этот максимум (или минимум).

При описании графического метода используется понятие линии уровня: *линией уровня* функции $f(x_1, x_2)$ называется множество всех точек (x_1, x_2), в которых функция принимает некоторое постоянное значение α. Линии уровня линейной функции $f(x_1, x_2) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2$ являются параллельными прямыми, перпендикулярными вектору нормали $\vec{n} = (c_1;\ c_2)$. Возрастание целевой функции происходит в направлении вектора нормали $\vec{n} = (c_1;\ c_2)$.

Алгоритм решения задачи ЛП графическим методом состоит в следующем:

1) Строится множество X всех допустимых решений.

2) Если $X = \varnothing$, то задача неразрешима.

3) Если $X \ne \varnothing$, то рассматриваются прямые уровня $f = \alpha$ при монотонном изменении α от $-\infty$ до $+\infty$. При увеличении α прямая $f = \alpha$ смещается параллельно в направлении вектора $\vec{n}$. Если A – первая точка встречи прямой уровня с областью *X*, $f(A) = \alpha_0$, то прямая уровня $f(x) = \alpha$ при $\alpha < \alpha_0$ не имеет общих точек с *X*, отку-

да следует, что $\alpha_0 = \min f$ на X. Аналогичным образом, если A – последняя точка пересечения линии уровня с X, то $f(A) = \max f$ на X.

Если первой точки пересечения линии уровня с X не существует (то есть при всех α из некоторого промежутка вида $(-\infty; \alpha_0]$ прямая $f = \alpha$ пересекает X), то $\min f = -\infty$, и задача на минимум неразрешима. Если не существует последней точки пересечения, то $\max f = +\infty$, и неразрешима задача на максимум.

Таким образом, из чертежа всегда видно, разрешима задача или нет. Из чертежа также видно, имеются ли у допустимого множества вершины. Отметим сразу, что отсутствие вершины – явление довольно редкое, при ограниченной целевой функции допустимое множество X без вершины может быть только двух видов:

1) X – полуплоскость;
2) X – область, ограниченная двумя параллельными прямыми.

Если у X есть хотя бы одна вершина, то (при ограниченной целевой функции) оптимальное значение может быть найдено методом перебора вершин. Для вычисления целевой функции в некоторой вершине V допустимого множества необходимо знать точное значение ее координат. Для определения координат вершины V решается система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i, \\ a_{j2} x_1 + a_{j2} x_2 = b_j, \end{cases}$$

где i и j – номера прямых, ограничивающих область X, на пересечении которых находится вершина V. Графический метод позволяет избежать полного перебора вершин. Действительно, если из чертежа видно, что A – *единственная* первая (или последняя) точка пересечения линии уровня с X, то незачем вычислять координаты других вершин, так как A – единственное оптимальное решение. Для некоторых задач, однако, из чертежа не ясно, в какой именно точке линия уровня пересекает в первый раз допустимое множество. В этом случае необходимо найти координаты всех «подозрительных» на оптимальность вершин, вычислить для них значения целевой функции и выбрать из них вершины с оптимальным значением. Заметим, что могут оказаться две оптимальные вершины A и B. Тогда множество всех оптимальных решений X^* – это отрезок AB.

Пусть $\alpha_0 = \max f$ (или $\alpha_0 = \min f$) – оптимальное значение f на X. Множество всех оптимальных решений X^* является подмно-

жеством линии уровня $f = \alpha_0$ и задается системой линейных неравенств. Поэтому множество X^* является либо точкой, либо отрезком, либо лучом, либо прямой.

Задачи линейного программирования общего вида допускают решение графическим методом, если их можно преобразовать к задаче с двумя переменными.

Примеры

1. Найти минимальное и максимальное значение целевой функции $f = x_1 + x_2 + 3$ при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 2x_1 + x_2 \le 14, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение.

На рис. 1 изображены допустимое множество *X*, линия уровня $f = 3$ и вектор нормали $\vec{c} = (1;\ 1)$. Перемещая линию уровня по направлению вектора $\vec{c}$, находим сначала точку минимума целевой функции $\vec{x}_{\min} = A(2;0)$, $f_{\min} = 5$, а затем точку максимума $\vec{x}_{\max} = B(4;6)$, $f_{\max} = 13$.

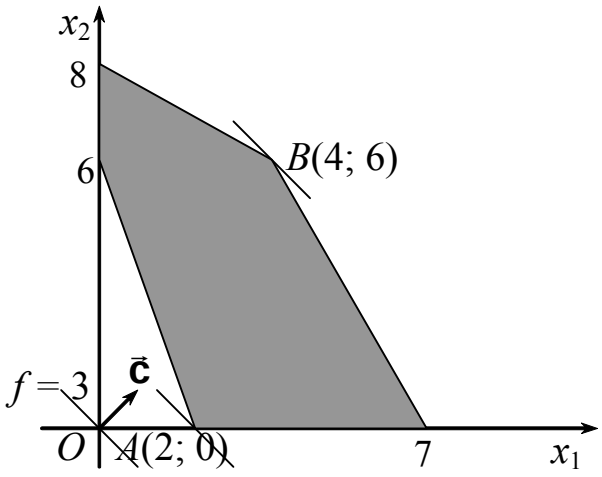

Рис. 1

2. Решить следующую задачу ЛП:

$$f = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ x_i \geq 0 \ \ (i = 1, \ldots, 5). \end{cases}$$

Решение.

После исключения переменных x_3, x_4, x_5 получим задачу ЛП с двумя переменными:

$$f = 5x_1 - 5x_2 + 4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решая последнюю задачу графическим методом (рис. 2), находим ее оптимальное решение $A(4;\ 1), f_{\max} = 19$.

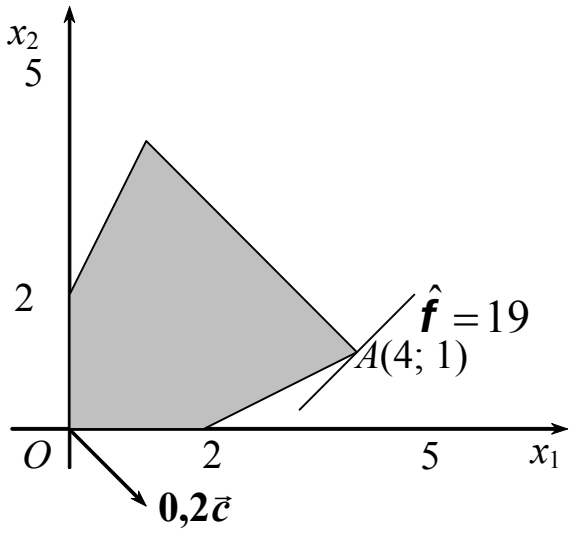

Рис. 2

Затем вычисляем значения переменных x_3, x_4, x_5 исходной задачи, соответствующие координатам точки A: $x_3^* = 9$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 0$. В результате получаем оптимальное решение исходной задачи: $\vec{x}^* = (4;\ 1;\ 9;\ 0;\ 0)$, $f_{\max} = 19$.

Упражнения

12. Пусть даны функция f и точки $A_1,...,A_n$; X – выпуклая линейная оболочка точек $A_1,...,A_n$. Изобразите линии уровня $f=\alpha$ функции f; укажите направление возрастания значений функции f; вычислите значения функции f в угловых точках множества X; найдите наименьшее и наибольшее значения функции на множестве X.

а) $f=-x_1+3x_2$, $A_1(1;3), A_2(3;1)$, $(n=2)$;

б) $f=-4x_1-5x_2$, $A_1(0;3), A_2(2;1), A_3(4;5)$, $(n=3)$;

в) $f=7x_1-5x_2$, $A_1(0;1), A_2(1;1), A_3(2;3), A_4(4;0)$, $(n=4)$.

13. Какая из задач линейного программирования $f\to\min(\max)$ при $\vec{x}\ge 0$ и $A\vec{x}\le\vec{b}$, неразрешима:

а) $f=x_1+x_2\to\min(\max)$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases}-5x_1+x_2\ge 2,\\ -5x_1+x_2\le 3;\end{cases}$

б) $f=-3x_1-4x_2\to\min(\max)$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases}-6x_1+x_2\ge 6,\\ -7x_1+x_2\le 7.\end{cases}$

14. Докажите, что значения целевой функции $f(\vec{x})=c_0+\vec{c}\cdot\vec{x}$ возрастают в направлении вектора нормали $\vec{c}$ к ее линии уровня $f(\vec{x})=\alpha$.

15. Проверьте, что область допустимых значений задачи линейного программирования является треугольником. Решите графически задачу ЛП:

а) $f=-2x_1+3x_2\to\max$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases}7x_1-3x_2\ge 14,\\ 7x_1-2x_2\le 21;\end{cases}$

б) $f=x_1+2x_2+3\to\max$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases}x_1+3x_2\le 11,\\ x_1-4x_2\le -3,\\ 2x_1-x_2\ge 1;\end{cases}$

в) $f=x_1+3x_2\to\min$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases}x_1+x_2\ge 4,\\ -x_1+2x_2\le 2,\\ x_1-x_2\le 2;\end{cases}$

г) $f = 2x_1 + 3x_2 \to \min$ при $\overleftrightarrow{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 18, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 25. \end{cases}$

16. Проверьте, что область допустимых значений задачи линейного программирования является четырехугольником. Решите графически задачу ЛП:

а) $f = 2x_1 - 5x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8; \end{cases}$

б) $f = -x_1 + 4x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12; \end{cases}$

в) $f = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 7; \end{cases}$

г) $f = 4x_1 + 3x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1, \\ x_1 - 5x_2 \leq -1, \\ x_1 + x_2 \leq 5. \end{cases}$

17. Решите графически задачу ЛП для неограниченной области допустимых значений:

а) $f = x_1 + x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -5x_1 + x_2 \geq 2, \\ -5x_1 + x_2 \leq 3; \end{cases}$

б) $f = -3x_1 - 4x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq -3, \\ -x_1 + x_2 \leq 1; \end{cases}$

в) $f = -2x_1 - x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \leq -1, \\ x_1 \leq 2; \end{cases}$

г) $f = x_1 + 3x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 - x_2 \leq -1, \\ 3x_1 - x_2 \geq -3. \end{cases}$

18. Проверьте, что область допустимых значений задачи ЛП является пятиугольником. Решите графически задачу ЛП:

а) $f = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -9, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 30; \end{cases}$

б) $f = x_1 + 2x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ 3x_1 + x_2 \leq 18, \\ x_1 - x_2 \geq -2; \end{cases}$

в) $f = 3x_1 + 2x_2 - 4 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - 5x_2 \geq -20, \\ 6x_1 + x_2 \leq 36; \end{cases}$

г) $f = x_1 + x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 1, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8. \end{cases}$

19. Проверьте, что задача ЛП имеет бесконечно много оптимальных решений. Найдите их:

а) $f = 2x_1 - 8x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq -10, \\ 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 11; \end{cases}$

б) $f = x_1 - 4x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq -16, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 23, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 5, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 16; \end{cases}$

в) $f = x_1 + x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 12; \end{cases}$

г) $f = -3x_1 + x_2 + 10 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 3, \\ x_1 + 3x_2 \geq 11, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1. \end{cases}$

20. Решите графически следующие задачи ЛП:

а) $f = -6x_1 - 5x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -6x_1 + 12x_2 \geq 1, \\ -6x_1 + 15x_2 \leq 2, \\ -6x_1 + 20x_2 \geq 3; \end{cases}$

б) $f = 2x_1 - x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -2x_1 + 12x_2 \leq 3, \\ -4x_1 + 15x_2 \geq 3, \\ 3x_1 + x_2 \leq 1; \end{cases}$

в) $f = 2x_1 - 3x_2 \to \min, \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 1, \\ x_1 + 15x_2 \leq 5, \\ x_1 \leq 2; \end{cases}$

г) $f = x_1 + 5x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ -2x_1 - 3x_2 \leq -2, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2. \end{cases}$