Г л а в а 1

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

1.1. Точечные пространства

Ранее было рассмотрено арифметическое пространство строк R^n. В математике конечный упорядоченный набор координат может интерпретироваться не только как вектор, но и как точка. Этот факт позволяет ввести понятие, которое обобщает геометрические понятия плоскости и пространства.

> ***Определение.*** Пусть имеется линейное (векторное) пространство V. Непустое множество T называется *точечным* (*аффинным*) *пространством*, *ассоциированным с* V, если выполнены следующие аксиомы:
>
> 1) каждой упорядоченной паре точек $A, B \in T$ поставлен в соответствие вектор $\vec{p} = \overrightarrow{AB} \in V$;
> 2) для любой точки A из T и любого вектора $\vec{p} \in V$ существует единственная точка B в T, такая, что $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$;
> 3) для любых $A, B, C \in T$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (правило треугольника).

Векторы линейного пространства V называются при этом *свободными векторами* точечного пространства T. Если размерность линейного пространства V равна n, т.е. $\dim V = n$, то и T называется *n-мерным точечным пространством*. Если выполнено равенство из второй аксиомы, то говорят, что точка B получена из A откладыванием вектора $\vec{p}$ и пишут $B = A + \vec{p}$.

Если фиксировать некоторую точку O точечного пространства T, то любая другая точка A из T может быть получена, если от точки O отложить *радиус-вектор* $\vec{p} = \overrightarrow{OA}$. В этом случае точка O называется началом координат, а любая точка пространства T отождествляется со своим радиус-вектором.

Частным случаем аффинного пространства является *арифметическое точечное пространство* R^n, точками которого являются всевозможные упорядоченные последовательности n вещественных чисел. Для пары точек $A(a_1,\ldots,a_n)$, $B(b_1,\ldots,b_n)$ рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ldots,b_n-a_n)$, при этом точка A называется *началом вектора* $\overrightarrow{AB}$, а точка B – *концом вектора* $\overrightarrow{AB}$. Для того, чтобы отложить вектор $\vec{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ от точки $A(a_1,\ldots,a_n)$ достаточно к координатам точки A прибавить соответствующие координаты вектора $\vec{p}$:

$$B=A+\vec{p}=(a_1+p_1,a_2+p_2,\ldots,a_n+p_n).$$

В школьном курсе математики используется понятие прямоугольной декартовой системы координат на плоскости и в пространстве. Обобщением этого понятие является понятие аффинной системы координат, в которой не предполагается, что оси координат образуют прямой угол. Аффинная система координат на плоскости может быть задана точкой O (началом координат) и двумя базисными векторами $\vec{e}_1,\vec{e}_2$. Тогда для любой точки A плоскости можно указать разложение радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ по базису $\overrightarrow{OA}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2$.

Аффинная система координат в точечным пространстве T, ассоциированным с линейным пространством V, задается набором, состоящим из точки O, называемой началом координат, и некоторого базиса пространства V. При фиксированном базисе в пространстве V точечное пространство T можно отождествить с арифметическим n-мерным точечным пространством подходящей размерности.

1.2. Прямая и отрезок в n-мерном пространстве

Пусть имеется точечное пространство T, ассоциированное с n-мерным линейным пространством V.

> ***Определение.*** Прямой, проходящей через точку A из T в направлении вектора $\vec{p}$ из V, называется множество точек X вида $X=A+t\vec{p}$, где t – любое вещественное число.

При заданной системе координат, $A(a_1,\ldots,a_n)$, $X(x_1,\ldots,x_n)$ и $\vec{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ равенство может быть записано в виде системы равенств $x_1 = a_1 + tp_1, \ldots, x_n = a_n + tp_n$, которые называют *параметрическими уравнениями прямой,* (t – *параметр,* $t \in (-\infty, \infty)$), а вектор $\vec{p}$ – *направляющим вектором прямой.*

Определение. *Отрезком* $\overrightarrow{AB}$, соединяющим точки A и B из T, называется множество точек X вида $X = A + t\overrightarrow{AB}$, где параметр $t \in [0,1]$.

Теорема. Отрезок AB состоит из точек X, для которых верно равенство $\overrightarrow{OX} = s\overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{OB}$, где s – любое число из [0,1].

1.3. Различные виды плоскостей

Понятия прямой и плоскости в трехмерном пространстве обобщаются в n-мерном точечном пространстве *T* следующим образом.

Определение. Для натурального числа k и набора линейно независимых векторов $\overrightarrow{p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_k}$ из линейного пространстве V *k-мерной плоскостью, проходящей через точку A,* называется множество точек вида $X = A + t_1\overrightarrow{p_1} + \ldots + t_k\overrightarrow{p_k}$, где $t_1, \ldots, t_k$ – любые вещественные числа.

Из линейной независимости указанных векторов *n*-мерного пространства следует, что $0 \le k \le n$. Случаи *k* = 0 (это одна точка *A*) и *k* = *n* (это все пространство *T*) тривиальны. Особый интерес представляют случаи *k* = 1 и *k* = *n* – 1. В случае *k* = 1 (одномерные плоскости) являются прямыми, как легко видеть из определения. Плоскость размерности *n* – 1 называется *гиперплоскостью.*

Теорема. В n-мерном точечном пространстве T любая гиперплоскость состоит из всех точек $X = (x_1, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0$,

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ – любые фиксированные вещественные числа, причем не все из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны нулю.

1.4. Точечные n-мерные евклидовы пространства

Определение. Точечное пространство T, ассоциированное с некоторым линейным пространством V, называется *евклидовым*, если евклидовым является линейное пространство V, т.е. на нем определено скалярное произведение.

Особенно важную роль здесь играет арифметическое n-мерное точечное пространство, ассоциированное с арифметическим n-мерным линейным пространством $\mathbf{R}^n$, в котором скалярное произведение задается формулой

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n .$$

Скалярное произведение позволяет ввести расстояние между точками и углы между прямыми в точечном пространстве.

Определение. *Расстояние* $|AB|$ между точками A и B евклидова пространства полагается равным длине (норме) вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, т.е. $|AB|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Определение. *Угол φ между прямыми* с направляющими векторами $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ полагается равным углу между этими векторами, т.е. геометрически он однозначно определяется из условий $\cos\varphi=\dfrac{\left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\right)}{\left|\overrightarrow{a_1}\right|\left|\overrightarrow{a_2}\right|},\quad 0\le\varphi\le\pi.$

В точечном евклидовом пространстве можно ввести прямоугольную систему координат. Система координат точечного евклидова пространства, заданная началом координат и базисом ассоциированного с ним линейного евклидова пространства, называется *прямоугольной*, если выбранный базис ортонормированный.

При фиксированной прямоугольной системе координат в точечном n-мерном евклидовом пространстве легко вычислять расстояние между точками $A=(a_1,\ldots,a_n)$ и $B=(b_1,\ldots,b_n)$:

$$|AB|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+\ldots+(b_n-a_n)^2}.$$

Если l и m – две прямые в точечном n-мерном евклидовом пространстве с направляющими векторами $\vec{p}=(p_1,\ldots,p_n)$ и

$\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ соответственно, то косинус угла φ между прямыми можно найти по формуле $\cos\varphi = \dfrac{p_1 q_1 + \ldots p_n q_n}{\sqrt{p_1^2 + \ldots p_n^2}\sqrt{q_1^2 + \ldots q_n^2}}$.

1.5. Проекция точки на гиперплоскость

Важную роль в геометрических рассмотрениях играет понятие проекции точки на гиперплоскость.

Определение. *Проекцией точки M на гиперплоскость* Г называется такая точка $P \in \Gamma$, что вектор $\overrightarrow{PM}$ ортогонален любому вектору $\overrightarrow{AB}$, где точки *A*, *B* принадлежат плоскости Г.

Теорема. Проекция точки *M* на гиперплоскость Г всегда существует. При этом расстояние от точки *M* до ее проекции $P \in \Gamma$ меньше расстояния от точки *M* до любой другой точки гиперплоскости Г.

Определение. *Расстоянием от точки M до гиперплоскости* Г называется длина вектора $\overrightarrow{PM}$, где $P \in \Gamma$ – проекция точки *M* на гиперплоскость Г.

Длина вектора $\overrightarrow{PM}$ может быть вычислена по формуле

$$\left|\overrightarrow{PM}\right| = \frac{\left|a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0 + \ldots + a_n x_n^0 + b\right|}{\left|\vec{a}\right|},$$

где $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – вектор нормали к гиперплоскости Г, заданной уравнением $a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0 + \ldots + a_n x_n^0 + b = 0$.

1.6. Линейные геометрические объекты на плоскости и в пространстве

Рассмотренные выше понятия в n-мерном пространстве применим к случаю обычной двумерной плоскости и трехмерного пространства. Параметрические уравнения прямой на плоскости принимают вид

$$\begin{cases} x = a + pt, \\ y = b + qt. \end{cases}$$

Исключая параметр t, получим канонические уравнения прямой

$$\frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}.$$

Отметим, что последнее уравнение имеет смысл и в том случае, если одна из компонент направляющего вектора (p, q) равна нулю. Из этого уравнения легко получить общее уравнение прямой:

Ax + By + C = 0.

В случае $B \neq 0$ из общего уравнения прямой получим уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$.

В трехмерном пространстве параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = a + pt, \\ y = b + qt, \\ z = c + rt. \end{cases}$$

Параметрические уравнения плоскости при этом имеют вид

$$\begin{cases} x = a + p_1 t_1 + p_2 t_2, \\ y = b + q_1 t_1 + q_2 t_2, \\ z = c + r_1 t_1 + r_2 t_2. \end{cases}$$

Эти уравнения содержат два параметра t_1 и t_2. Направляющие векторы плоскости $\overrightarrow{f_1} = (p_1, q_1, r_1)$ и $\overrightarrow{f_2} = (p_2, q_2, r_2)$ должны быть линейно независимы. С другой стороны, как гиперплоскость трехмерного пространства плоскость задается своим *общим уравнением*:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

в котором вектор (A,B,C) не равен нулю.

Кроме того, если плоскость π проходит через точку $M = (a, b, c)$ и имеет направляющие векторы $\overrightarrow{f_1} = (p_1, q_1, r_1)$ и $\overrightarrow{f_2} = (p_2, q_2, r_2)$ плоскости, то условием принадлежности точки $N = (x, y, z)$ плоскости π является компланарность векторов $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f_1}$ и $\overrightarrow{f_2}$. А этот факт равносилен равенству нулю определителя

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда легко получаем уравнения плоскости, проходящей через три данные точки $M=(a,b,c), M_1=(a_1,b_1,c_1)$ и $M_2=(a_2,b_2,c_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ a_1-a & b_1-b & c_1-c \\ a_2-a & b_2-b & c_2-c \end{vmatrix}=0.$$

В некоторых ситуациях удобно использовать уравнение в отрезках на осях координат. Оно может быть получено из общего уравнения плоскости в случае, если свободный член уравнения D не равен 0, переносом свободного члена в правую часть и делением всех коэффициентов на $-D$:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 .$$

Исключая из параметрических уравнений прямой параметр t, получим *канонические уравнения прямой*

$$\frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{r}.$$

Следует отметить, что в пространстве прямая задается не одним, а двумя уравнениями. В канонических уравнениях вектор (a,b,c) называется *направляющим вектором*. Направляющий вектор не может быть равным нулю и указывает направление прямой. Направляющий вектор определен с точностью до коллинеарности, т.е. до умножения на ненулевой множитель всех его компонент. Прямая в пространстве может быть также задана как пересечение двух непараллельных плоскостей, а именно:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \end{cases}$$

где векторы (A,B,C) и (A_1,B_1,C_1) не коллинеарны.

1.7. Линейная модель издержек и прибыли фирмы

Функция совокупных издержек в простейших случаях считается линейной $C(x) = b + ax$, где a – это постоянные издержки (включающие в себя амортизацию, аренду помещения и т.д.), b – переменные издержки, зависящие от количества x произведенного товара (включающие в себя заработную плату, расходы на сырье и т.д.) *Совокупный доход* $R(x)$ выражается формулой $R(x) = px$, где p –цена единицы товара. Если произведено x единиц товара, то *прибыль* $P(x)$ определяется формулой $P(x) = R(x) – C(x)$.

Точкой безубыточности называется значение x, при котором прибыль равна нулю.

Примеры

1. Найти общее уравнение прямой l, содержащей точки $P(2;5)$ и $Q(-2;-2)$.

Решение.

Выберем в качестве начальной точки прямой l точку Р. Вычислим направляющий вектор

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2;-2) - (2;5) = (-4;-7)$.

Каноническое уравнение прямой l запишется следующим образом: $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-5}{-7}$. Отсюда получаем общее уравнение прямой $7x - 4y + 6 = 0$.

2. Найти расстояние от точки $M(3;2)$ до прямой l, заданной уравнением прямой в отрезках $\frac{x}{4} + \frac{y}{-5} = 1$.

Решение.

Записываем общее уравнение $l: 5x - 4y + 20 = 0$. Отсюда

$$\rho(M,l) = \frac{|3\cdot 5 - 4\cdot 2 + 20|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{27}{\sqrt{41}}.$$

3. Найти проекцию P точки $A(-2;1)$ на прямую $l: 3x + y - 2 = 0$.

Решение.

Пусть $P(x;y)$ – искомая проекция. Вектор $\overrightarrow{AP}$ является нормалью к прямой l, т.е. векторы $\overrightarrow{AP}$ и $\vec{n} = (3;1)$ коллинеарны. Следовательно, $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1}$. Отсюда $x - 3y + 5 = 0$. Кроме того, $P \in l$, поэтому координаты точки $P(x,y)$ удовлетворяют уравнению прямой $l: 3x + y - 2 = 0$. Решением системы является пара $(x;y) = (0,1;1,7)$.

Ответ: $P(0{,}1; 1{,}7)$.

4. Найти расстояние от точки $A(4; 4; 4)$ до прямой l, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-8}{3}.$$

Решение.

Записываем параметрические уравнения прямой l с начальной точкой $C(4; 5; 8)$ и направляющим вектором $\vec{p}=(1; 2; 3)$:

$$\begin{cases} x=4+t, \\ y=5+2t, \\ z=8+3t. \end{cases}$$

Таким образом, проекция точки A на прямую l имеет вид $B(4+t; 5+2t; 8+3t)$.

Чтобы найти t, необходимо воспользоваться условием ортогональности векторов $\vec{p}$ и $\overrightarrow{AB}$. Имеем

$$(\vec{p},\overrightarrow{AB})=\big((1; 2; 3),(t; 1+2t; 4+3t)\big)=$$
$$=t+2(1+2t)+3(4+3t)=14+14t=0.$$

Отсюда $t=-1$, $B(3; 3; 5)$, $\overrightarrow{AB}=(-1; -1; 1)$. Окончательно, имеем $\rho(A,l)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}.$

Ответ: $\rho(A,l)=\sqrt{3}$.

5. Найти точку A', симметричную точке $A(2; 1; 5)$ относительно плоскости $\Pi: x+2y-2z+24=0$.

Решение.

Составим параметрические уравнения прямой l, содержащей точку A и перпендикулярной заданной плоскости. Прямая l перпендикулярна Π, если ее направляющий вектор $\vec{p}$ равен вектору нормали плоскости $\vec{n}=(1; 2; -2)$. Считая, что A – начальная точка на прямой l, имеем следующие параметрические уравнения этой прямой:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 3 - 2t. \end{cases}$$

Таким образом, всякая точка Q прямой l имеет вид $Q\left(1+t; 2+2t; 3-2t\right)$. В частности, подставляя эти выражения проекции P в уравнение плоскости Π, получим

$$2 + t + 2(1+2t) - 2(5-2t) + 24 = 0.$$

Решая это уравнение относительно t, получим $t = -2$.

Тогда $P = \left(0; -3; 9\right)$ и $\overrightarrow{AP} = \left(0; -3; 9\right) - (2;1;5) = (-2;-4;4)$.

Отсюда $A' = P + \overrightarrow{AP} = (0;-3;9) + (-2;-4;4) = (-2;-7;13)$.

Ответ: $A' = (-2;-7;13)$.

6. Выберите начальную точку A и направляющие векторы $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ для плоскости, заданной системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 13x_4 = 7. \end{cases}$$

Решение.

Найдем общее решение системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 13 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, плоскость Π состоит из точек, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 + x_4, \\ x_3 = -1 - 2x_4. \end{cases}$$

В качестве начальной точки A можно взять базисное решение $A\left(5; -1;\ 0;\ 0\right)$. В качестве направляющих векторов можно взять фундаментальный набор решений соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4, \\ x_3 = -2x_4, \end{cases}$$

т.е. $\vec{p}_1 = \left(-2; 1; 0; 0\right)$, $\vec{p}_2 = \left(1; 0; -2; 1\right)$.

Ответ: $A(5;-1;\ 0;\ 0)$, $\vec{p}_1=(-2;1;0;0)$, $\vec{p}_2=(1;0;-2;1)$.

7. Даны точки: $A(1;2;3;5)$, $B(2;4;2;5)$, $C(1;2;4;6)$, $D(2;5;6;5)$. Найти проекцию P точки D на плоскость ABC.

Решение.

Пусть A – начальная точка, $\overrightarrow{AB}=(1;2;-1;0)$ и $\overrightarrow{AC}=(0;0;1;1)$– направляющие векторы плоскости ABC. Запишем параметрические уравнения плоскости:

$$\begin{cases} x_1=1+1\cdot s+0\cdot t, \\ x_2=2+2\cdot s+0\cdot t, \\ x_3=3+(-1)\cdot s+1\cdot t, \\ x_4=5+0\cdot s+1\cdot t. \end{cases}$$

Следовательно, проекция точки D на плоскость ABC имеет вид $P(1+s;2+2s;3-s+t;5+t)$.

Параметры s,t находятся из условия ортогональности вектора $\overrightarrow{PD}$ векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Имеем

$$\overrightarrow{PD}=(1-s;3-2s;3+s-t;-t);$$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{PD})=4-6s+t=0;\ (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PD})=3+s-2t=0.$$

Решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 6s-t=4, \\ -s+2t=3, \end{cases}$$

находим $s=1, t=2$. Отсюда получаем $P(2;4;4;7)$.

8. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями

$$\begin{cases} p=-2q+12, \\ p=q+3. \end{cases}$$

а) Найти точку рыночного равновесия.

б) Найти точку равновесия после введения налога, равного 3. Найти увеличение цены и уменьшение равновесного объема продаж.

в) Какая субсидия приведет к увеличению объема продаж на 2 единицы?

Решение.

а) Находим точку равновесия E, решив систему уравнений

$$\begin{cases} p = -2q + 12, \\ p = q + 3. \end{cases}$$

Точка E (q = 3, p = 6) является точкой равновесия.

б) Если введен налог t = 3, то функция спроса не меняется, а в функции предложения p заменяется на $p_t = p - t$ и система уравнений для определения новой точки равновесия примет вид

$$\begin{cases} p = -2q + 12, \\ p_t = q + 3, \\ p = p_t + 3. \end{cases}$$

Отсюда q = 2, а p = 8. Новая точка равновесия $E_1 = (2,8)$.

Следовательно, после введения налога равновесная цена увеличилась на 2 единицы, а равновесный объем уменьшился на 1 единицу.

в) Если предоставлена субсидия s , то функция спроса не меняется, а в функции предложения p заменяется на p_s, где $p = p_s - s$ и система уравнений для определения точки равновесия имеет вид

$$\begin{cases} p = -2q + 12, \\ p_s = q + 3, \\ p = p_s - s. \end{cases}$$

Новый объем q продаж равен (3 + 2) = 5 единицам. Подставляя q = 5 в систему, находим: p = 2, $p_s = 8$, s = 6

9. Постоянные издержки производства некоторой продукции составляют 125 тыс. руб. в месяц, а переменные – 700 руб. за единицу продукции. Продукция продается по цене 1200 руб. за единицу. Составить функцию прибыли. Определить:

а) точку безубыточности;

б) сколько единиц продукции нужно произвести, чтобы прибыль составила 105 тыс. руб. в месяц.

Р е ш е н и е.

Функция издержек $C(x)$ = 125 000 + 700x, функция совокупного дохода $R(x)$ = 1200x. Следовательно, функция прибыли $P(x)$ = 500x – 125 000.

а) Находим точку безубыточности, решив уравнение $P(x) = 0$. В результате $x = 250$.

б) Составим уравнение $P(x) = 105\,000$. Решая его, получим $x = 460$.

Упражнения и тестовые вопросы

1.1. Напишите общее уравнение прямой на плоскости, уравнение прямой с угловым коэффициентом и уравнение прямой в отрезках. Из общего уравнения прямой $5x-4y-40=0$ получите уравнение прямой с угловым коэффициентом и уравнение прямой в отрезках.

1.2. Найдите точку пересечения прямых:

а) $x-4y+5=0$, $2x-5y-2=0$; **б)** $4x+3y=15$, $7x+8y=29$.

1.3. **а)** Напишите уравнение прямой в отрезках, проходящей через точки $M(2;5)$ и $N(4;4)$.

б) Можно ли уравнение прямой $14x+17y=0$ записать в отрезках?

1.4. Опишите, как находится угол между двумя прямыми на плоскости, если они заданы своими общими уравнениями. Определите, при каком значении параметра прямые $l_1: 6x+5y-30=0$ и $l_2: 10x+ay-40=0$ перпендикулярны?

1.5. Даны точки $P(4;5)$ и $Q(11;2)$. Для прямой PQ найдите:

а) параметрические уравнения с начальной точкой P и направляющим вектором $\overrightarrow{PQ}$;

б) каноническое уравнение;

в) общее уравнение;

г) уравнение с угловым коэффициентом;

д) уравнение в отрезках.

1.6. Дайте определение проекции точки $M(x,y)$ на прямую $Ax+By+C=0$. Найдите проекцию начала координат O на прямую $l: x+4y-34=0$.

1.7. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(5;-3;1)$ параллельно плоскости $3x+4y-2z-7=0$.

1.8. Даны точки $A(2;4;3)$ и $B(5;-2;3)$. Составьте:

а) параметрические уравнения прямой с начальной точкой A и направляющим вектором $\overrightarrow{AB}$;

б) канонические уравнения прямой AB.

1.9. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки P(4;–2; 1) и Q(2; 4;–3).

1.10. Найдите для плоскости Π, содержащей точки $A(7;-3;0)$, $B(5;0;0)$, $C(-1;2;14)$, уравнение в отрезках.

1.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5;4;3)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.

1.12. Найдите канонические уравнения сторон AB и AC треугольника ABC, где $A(2;5;3)$, $B(-3;1;4)$, $C(7;1;8)$.

1.13. Напишите формулу расстояния от точки до плоскости. Найдите расстояние от точки M до плоскости Π:

а) $M(5;2;-2)$ $\Pi : x+2y-2z-7=0$;

б) $M(8;7;-1)$, $\Pi : x-4y+8z-17=0$.

1.14. Найдите расстояние между точками $A(2;3;6;4)$ и $B(1;1;2;2)$.

1.15. Даны точки $A(a-1;\ b-2;\ a+1;\ 2+b)$, $B(-1;-2;\ 1;\ 2)$, $C(0;-2;\ 1;\ 2)$, $D(-1;-1;\ 1;\ 2)$. При каких значениях параметров a и b точка A содержится в плоскости BCD?

1.16. Даны точки $A(2;3;4;5)$, $B(3;2;5;4)$, $C(3;4;3;6)$. Найдите угол A в треугольнике ABC.

1.17. Спрос и предложение на некоторый товар задаются функциями $p=q+100$, $p=-2q+250$.

а) Найти точку рыночного равновесия.

б) Найти новую точку рыночного равновесия при введении налога, равного 15 у.е. на единицу продукции.

в) Найдите точку рыночного равновесия при предоставлении государством субсидии, равной 9 у.е. на единицу продукции.

1.18. Функция издержек производства некоторого товара имеет вид $C(x)=30x+1800$. Цена одной единицы товара равна 70 денежным единицам. Построить графики функции издержек и функции прибыли. Найдите точку безубыточности.

1.19. Настольные лампы продаются по цене 1200 руб. каждая. Постоянные издержки составляют 24 тыс. руб. в месяц, а переменные – 800 руб. за лампу.

а) Найдите точку безубыточности, постройте график функции прибыли предприятия.

б) Сколько ламп фабрика должна произвести и продать, чтобы получить 15% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?