МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

ВСЕРОССИЙСКИЙ ЗАОЧНЫЙ
ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие
для второго курса студентов всех специальностей,
студентов бакалавриата всех направлений
и слушателей факультета непрерывного обучения

Под редакцией профессора Н.Ш. Кремера

Кафедра высшей математики

Москва 2010

ББК 22.1

Методические указания
и рекомендации по изучению дисциплины подготовил
профессор ***Н.Ш. Кремер***

Варианты контрольных работ подготовили:
ст. преподаватель *О.Г. Константинова*, доцент *А.В. Потемкин*,
доцент *Б.А. Путко*, ст. преподаватель *Н.И. Федорова*, доцент *И.М. Эйсымонт*
(г. Москва), ст. преподаватель *А.П. Лукавый* (г. Брянск),
доцент *М.Б. Хрипунова* (г. Владимир), доцент *Н.Л. Рубцова* (г. Волгоград),
доцент *Г.Б. Заболотских* (г. Киров), ст. преподаватель *Т.П. Паточкина*
(г. Курск), доцент *Л.Д. Казмина* (г. Липецк), ст. преподаватель
Б.К. Неворотов (г. Омск), доцент *А.А. Коропец* (г. Орел),
доцент *Ю.Н. Заваровский* (г. Пенза), доцент *Н.Д. Голичева* (г. Смоленск)

Учебно-методическое пособие обсуждено
на заседании кафедры высшей математики
Зав. кафедрой кандидат экономических наук, профессор ***Н.Ш. Кремер***

Учебно-методическое издание одобрено
на заседании Научно-методического совета ВЗФЭИ

Проректор, председатель НМС, профессор ***Д.М. Дайитбегов***

Теория вероятностей и математическая статистика. Учебно-методическое пособие для второго курса студентов всех специальностей, студентов бакалавриата всех направлений и слушателей факультета непрерывного обучения / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ВЗФЭИ, 2010.

В учебно-методическом пособии приведен обзор основных понятий и положений дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», даны методические рекомендации по ее изучению, выделены типовые задачи, представлены контрольные вопросы для самопроверки и задачи для самоподготовки по данной дисциплине, приведены варианты контрольных работ для студентов второго курса всех специальностей, студентов бакалавриата всех направлений и слушателей факультета непрерывного обучения, а также методические указания по их выполнению.

ББК 22.1

Предисловие

Среди математических дисциплин, изучаемых в экономическом вузе, «Теория вероятностей и математическая статистика» занимает особое место. Во-первых, она является теоретической базой статистических дисциплин. Во-вторых, методы теории вероятностей и математической статистики непосредственно используются при изучении массовых совокупностей наблюдаемых явлений, обработке результатов наблюдений и выявлении закономерностей случайных явлений. Наконец, теория вероятностей и математическая статистика имеет важное методологическое значение в познавательном процессе, при выявлении общих закономерностей исследуемых явлений, служит логической основой индуктивно-дедуктивных умозаключений.

Цель настоящего учебно-методического пособия – помочь студентам в изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», освоении основ вероятностных и математико-статистических методов исследования.

Своеобразная форма вероятностных утверждений, обычно сопровождаемых словами «вероятно», «практически достоверно», «в среднем», «сходится по вероятности» – первая проблема, с которой сталкиваются студенты при изучении дисциплины. Другая проблема связана с усвоением специфических теоретико-вероятностных понятий и положений, необходимостью абстрактно-логических рассуждений при изучении данной дисциплины. Одним из способов преодоления возникающих трудностей является решение достаточно большого числа задач.

При изучении дисциплины рекомендуется использовать учебник Н.Ш. Кремера «Теория вероятностей и математическая статистика» (М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007). Далее именно на этот учебник даются ссылки. Другие пособия могут быть использованы в качестве дополнительной учебной литературы.

Литература

Основная

1. **Кремер Н.Ш.** Теория вероятностей и математическая статистика. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007[1].
2. Теория вероятностей и математическая статистика: Методические указания по компьютерному тестированию. – М.: Вузовский учебник, 2007.
3. Математика: Методические указания по проведению и выполнению контрольных работ с использованием КОПР. – М.: ВЗФЭИ, 2009.

Дополнительная

1. **Гмурман В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. – М.: Юрайт-издат; Высшее образование, 2009.
2. **Гмурман В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие. – М.: Юрайт-издат; Высшее образование, 2009.
3. **Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М.** Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справочное пособие / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Юрайт-издат; Высшее образование, 2009.
4. **Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В.** Математика в экономике. Часть 3. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. – М.: Финансы и статистика, 2008.

[1] Возможно использование учебника предыдущих лет издания.

5. **Фадеева Л.Н.** Математика для экономистов: Теория вероятностей и математическая статистика: Курс лекций: учебное пособие. – М.: Эксмо, 2006.

6. **Фадеева Л.Н.** Математика для экономистов: Теория вероятностей и математическая статистика: Задачи и упражнения: учебное пособие. – М.: Эксмо, 2006.

Интернет-ресурсы

1. Компьютерная обучающая программа (КОПР2).
2. Электронные учебно-методические комплексы (ЭУМК).
3. Электронные тестовые базы LAN-TESTING и STELLUS.
4. Электронные ресурсы в системе STELLUS.
5. Электронная библиотека.

Содержание дисциплины и методические рекомендации по ее изучению

В этой части пособия приводится учебно-программный материал по каждой теме, который должен изучить студент в соответствии со ссылками на рекомендованный учебник [1].

Обращаем внимание студентов на то, что помимо лекций и практических занятий основной формой обучения в условиях заочного вуза является самостоятельная работа с учебниками и учебными пособиями. Дополнительно для самостоятельного изучения дисциплины рекомендуется компьютерная обучающая программа КОПР2 по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика», обзорная лекция и электронная учебно-методическая литература (интернет-ресурсы), размещенные на сайте института.

В помощь студентам в институте и его филиалах функционируют учебно-методические кабинеты, которые позволяют ознакомиться с образцами контрольных работ и авторскими текстами лекций, осуществить выход в Интернет, поработать с интернет-ресурсами, компьютерными обучающими программами и электронными версиями учебно-методической литературы, пройти тестирование в режиме самоконтроля.

Контрольные вопросы по каждой теме представлены в разделе «Вопросы для самопроверки».

Рекомендуемые по каждой теме задачи с решениями и для самостоятельной работы приводятся в разделе «Задачи для самоподготовки».

Вопросы, касающиеся организации компьютерного тестирования, основные типы и примеры тестовых заданий по данной дисциплине рассматриваются в брошюре [2] «Теория вероятностей и математическая статистика. Методические указания по компьютерному тестированию» (М.: Вузовский учебник, 2007).

Вопросы, касающиеся выполнения контрольных работ с частичным использованием КОПР, рассматриваются в брошюре [3] «Математика. Методические указания по проведению и выполнению контрольных работ с использованием КОПР» (М.: ВЗФЭИ, 2009).

Раздел I. Теория вероятностей

Тема 1. Классификация событий

Случайные события. Полная группа событий. Классическое и статистическое определения вероятности. Свойства вероятности события. Элементы комбинаторики. Непосредственный подсчет вероятности [1, § 1.1–1.3, 1.5, 1.6].

При изучении этой темы студенты сталкиваются с такими фундаментальными понятиями, как испытание (опыт, эксперимент), случайное событие, вероятность события и др. Необходимо представлять, что событие – это не какое-нибудь происшествие, а лишь возможный исход (результат) испытания, то есть выполнение определенного комплекса условий.

Вероятность события есть численная мера степени объективной возможности наступления события. Если при классическом определении вероятность события определяется как доля случаев, благоприятствующих данному событию, то при статистическом определении – как доля тех фактически произведенных испытаний, в которых это событие появилось. При этом предполагается, что число испытаний достаточно велико, а события – исходы тех испытаний, которые могут быть воспроизведены неограниченное число раз при одном и том же комплексе условий и обладают устойчивостью относительных частот. С теоретико-множественной трактовкой основных понятий и аксиоматическим построением теории вероятностей студент может ознакомиться по учебнику [1, § 1.12]. (Этот материал в обязательную программу не входит.)

Для решения задач на непосредственный подсчет вероятностей необходимо овладеть элементами комбинаторики [1, § 1.5], в первую очередь определением числа сочетаний C_n^m (без повторений).

Тема 2. Основные теоремы

Сумма и произведение событий. Теорема сложения вероятностей и ее следствия. Зависимые и независимые события. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей для зависимых и независимых событий. Формулы полной вероятности и Байеса [1, § 1.7–1.11].

Студент должен усвоить основные операции над событиями – их сумму и произведение. Если $(A + B)$ – событие, состоящее в появлении хотя бы одного из данных событий (то есть в наступлении либо события A, либо события B, либо обоих событий вместе), то AB представляет собой событие, состоящее в совместном появлении двух событий (то есть в наступлении и события A, и события B). Нужно знать, что событием, противоположным сумме нескольких событий, является произведение противоположных событий, то есть

$$\overline{A+B+...+K} = \overline{A}\,\overline{B}...\overline{K},$$

а событием, противоположным произведению нескольких событий, – сумма противоположных событий:

$$\overline{AB...K} = \overline{A}+\overline{B}+...+\overline{K}.$$

Основными теоремами данной темы являются теоремы сложения и умножения вероятностей. Следует знать, что вероятность суммы событий равна сумме их вероятностей, то есть $P(A + B) = P(A) + P(B)$, для несовместных событий, а вероятность произведения событий – произведению их вероятностей, то есть $P(AB) = P(A)P(B)$, для независимых событий.

Завершают тему формулы полной вероятности и Байеса, являющиеся следствием теорем сложения и умножения вероятностей. Общим для этих формул является то, что они применяются в случае, когда данное событие F может произойти только при условии появления одной из гипотез $A_1, A_2, ..., A_n$, образующих полную группу событий. Но если в формуле полной вероятности для $P(F)$ ищется вероятность события F (безотносительно к рассматриваемой гипотезе), то формула Байеса позволяет произвести количественную переоценку априорных вероятностей гипотез $P(A_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$, известных до испытания, лишь после того, как событие F произошло, то есть найти апостериорные (получаемые после проведения испытания) условные вероятности гипотез $P_F(A_i)$.

Особое внимание следует уделить задачам по данной теме. Решение каждой из них должно сопровождаться предварительным логическим анализом условия, формулировкой и обозначением искомого события, выявлением его логической связи с другими, более простыми событиями. Этот анализ позволяет выявить применимость в данной задаче той или иной формулы или теоремы (теорем сложения, умножения, формул полной вероятности, Байеса и т.п.) и обосновать дальнейшие операции, связанные с расчетом вероятностей.

При решении задачи прежде всего необходимо ввести обозначения для событий и по данным условия составить соотношения между ними, позволяющие определить искомую вероятность через данные или более просто определяемые вероятности. Нужно соблюдать условие применимости используемой теоремы (например, условие несовместности событий при использовании теоремы сложения, условие зависимости или независимости событий при использовании теоремы умножения и т.п.).

Тема 3. Повторные независимые испытания

Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли. Многоугольник распределения вероятностей. Асимптотическая формула Пуассона и условия ее применения. Локальная теорема Муавра–Лапласа. Функция $f(x)$, ее свойства и график. Интегральная теорема Муавра–Лапласа и ее следствия. Функция $\Phi(x)$ Лапласа и ее свойства [1, § 2.1–2.4].

В этой теме рассматривается схема Бернулли – последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может наступить с постоянной вероятностью $P(A) = p$. Результат испытаний – появление m раз события A, которое чередуется в любом порядке с $n - m$ раз непоявлением события A.

При этом могут определяться вероятности того, что:

а) событие A появится точно m раз (вероятность $P_{m,n}$);

б) событие A появится не менее или не более данного числа a раз (вероятности $P_n(m \geq a)$ или $P_n(m \leq a)$;

в) событие A появится m раз, заключенное в границах от a до b (включительно), то есть вероятность $P_n(a \leq m \leq b)$.

При решении задач по данной теме в первую очередь следует уяснить, что́ нужно понимать под испытанием и событием A. Далее необходимо сформулировать вопрос задачи в виде условий, налагаемых на число m наступлений события или частость (относительную частоту) m/n. Затем следует перейти к записи условий задачи в терминах и обозначениях схемы повторных испытаний и выбору подходящей расчетной формулы и вычислительной схемы.

Расчет вероятностей $\left(P_{m,n}\ P_n\left(a \leq m \leq b\right) = \sum_{m=a}^{b} P_{m,n}\right)$ можно производить по точной формуле Бернулли, если n – небольшое число, и по асимптотическим формулам, если n велико. Если по техническим причинам вероятность $P_{m,n}$ не может быть вычислена по формуле Бернулли, то используются асимптотические формулы – формула Пуассона (если n велико, p мала, так что $\lambda = np \leq 10$) или локальная формула Муавра–Лапласа (если $npq \geq 20$). Если необходимо найти вероятность числа m (частости m/n) появления события, заключенного в некоторых пределах, то при условии $npq \geq 20$ может быть использована интегральная теорема Муавра–Лапласа и ее следствия.

Тема 4. Дискретные случайные величины

Понятие случайной величины и ее описание. Виды случайных величин. Дискретная случайная величина и закон (ряд) ее распределения. Основное свойство закона распределения. Арифметические операции над случайными величинами. Биномиальный закон распределения и закон Пуассона. Математическое ожидание дискретной случайной *величины и его свойства. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия: а) случайной величины, распределенной по биномиальному закону и закону Пуассона; б) частости события в n независимых повторных испытаниях* [1, § 3.1–3.4, 3.8, 4.1, 4.2].

В этой теме рассматривается одно из фундаментальных понятий теории вероятностей – понятие случайной величины. Под *случайной величиной* понимается переменная, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества своих значений (какое именно, заранее неизвестно). Если говорить более строго, то случайная величина есть функция, заданная на множестве элементарных исходов.

Наиболее полным описанием случайной величины является закон ее распределения, то есть всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

При решении задач случайная величина, как и случайное событие, подлежит четкому определению по условию. Ее связь со случайным событием заключается в том, что принятие ею некоторого числового значения (то есть выполнение равенства $X = x_i$) есть случайное событие, характеризуемое вероятностью $P(X = x_i) = p_i$.

В данной теме рассматриваются дискретные случайные величины (ДСВ), характеризуемые конечным или бесконечным, но счетным множеством возможных значений x_i и соответствующими им вероятностями $p_i = P(X = x_i)$. Большинство задач темы связано с построением для заданной случайной величины закона распределения, то есть таблицы вида $\begin{Bmatrix} x_i \\ p_i \end{Bmatrix}$. Решение подобных задач требует, прежде всего, четких определений случайной величины и испытания, количественный результат которого характеризуется значениями $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n$.

Затем можно перейти к построению закона распределения случайной величины, а точнее – к вычислению вероятностей p_i как вероятностей событий $X = x_i$. Здесь могут быть использованы приемы и методы, рассмотренные при решении задач в темах 1–3.

Общая схема решения задач на построение законов распределения включает:

1) введение и четкое описание случайной величины, о которой идет речь;

2) описание множества ее возможных значений $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n$;

3) рассмотрение выполнения каждого из равенств $X = x_i$ как случайного события;

4) вычисление вероятностей этих событий с помощью основных теорем и формул;

5) проверку правильности составленного распределения с помощью равенства $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Особое внимание следует обратить на числовые характеристики случайной величины, призванные в сжатой форме выразить наиболее существенные черты распределения, в частности на математическое ожидание, дисперсию и их свойства.

Тема 5. Непрерывные случайные величины. Нормальный закон распределения

Функция распределения случайной величины, ее свойства и график. Определение непрерывной случайной величины. Вероятность отдельно взятого значения непрерывной случайной величины. Плотность вероятности, ее свойства и график. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины. Определение нормального закона распределения; теоретико-вероятностный смысл его параметров. Нормальная кривая и зависимость ее положения и формы от параметров. Функция распределения нормально распределенной случайной величины и ее выражение через функцию Лапласа. Формулы для определения вероятности: а) попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал; б) отклонения нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания. Правило «трех сигм». Понятие о центральной предельной теореме (теореме Ляпунова) [1, § 3.5–6.5].

Функция распределения случайной величины – одно из фундаментальных понятий теории вероятностей, поскольку является универсальным описанием любой случайной величины. Функция распределения $F(x)$ представляет собой вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, то есть $F(x) = P(X < x)$. Необходимо знать свойства функции распределения $F(x)$ и ее производной $\varphi(x)$ – плотности вероятности случайной величины и уметь изображать их графически. Из законов распределения непрерывных случайных величин наиболее важное значение имеет нормальный закон распределения. Необходимо знать теоретико-вероятностный смысл его параметров, выражение функции распределения $F_N(x)$ через функцию Лапласа $\Phi(x)$, свойства нормально распределенной случайной величины, правило «трех сигм». Важно уяснить, что нормальный закон, в отличие от прочих, является предельным законом, к которому при некоторых весьма часто встречающихся условиях приводит совокупное действие (сумма) n независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ при $n \to \infty$.

Тема 6. Двумерные (n-мерные) случайные величины

Понятие двумерной (n-мерной) случайной величины. Одномерные распределения ее составляющих. Условные распределения. Ковариация и коэффициент корреляции. Свойства коэффициента корреляции. Двумерное нормальное распределение. Условные математическое ожидание и дисперсия [1, § 5.1, 5.6, 5.7].

В этой теме обобщается понятие случайной величины, вводятся понятия многомерной (n-мерной) случайной величины, условных распределений и их числовых характеристик. Так как математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y недостаточно полно характеризуют двумерную случайную величину (X, Y), рассматриваются ковариация и коэффициент корреляции случайных величин, которые позволяют выявить степень зависимости между X и Y. Завершается тема понятием двумерного нормального закона распределения. Следует обратить внимание на то, что в случае двумерного нормального закона зависимости условных математических ожиданий $M_x(Y)$ (или $M_y(X)$) от x (или y), то есть нормальные регрессии Y по X (или X по Y), всегда линейны, а условные дисперсии $D_x(Y)$ (или $D_y(X)$) постоянны и не зависят от значений x (или y).

Тема 7. Закон больших чисел

Сущность закона больших чисел. Значение теорем закона больших чисел для математической статистики. Лемма Чебышева (неравенство Маркова). Неравенство Чебышева и его частные случаи: а) для средней арифметической случайных величин; б) для случайной величины, распределенной по биномиальному закону; в) для частости события. Теорема Чебышева и ее следствие. Теорема Бернулли [1, § 6.1–6.4].

Данная тема важна для понимания методов математической статистики. Она включает ряд теорем, устанавливающих при определенных условиях устойчивость частости (относительной частоты) и средней арифметической (теоремы Бернулли, Чебышева и др.). При изучении каждой из них важно уяснить условия их применимости, а также смысл утверждений, сопровождаемых словами «практически невозможно», «практически достоверно». Особое внимание следует уделить понятию «сходимость по вероятности».

При использовании неравенств Маркова и Чебышева в процессе решения задач необходимо учитывать, что:

1) приведенные неравенства дают не точное значение соответствующей вероятности, а лишь ее оценку «снизу» или «сверху» (вероятность не меньше (не больше) данного числа);

2) неравенство Чебышева оценивает вероятность отклонения случайной величины X от ее математического ожидания $M(X) = a$.

Неравенство $|X - a|$ может быть представлено в виде: $-\varepsilon < X - a \leq \varepsilon$ или $-\varepsilon \leq X \leq a + \varepsilon$. Это означает, что случайная величина X принимает значения в границах, симметрично расположенных относительно a, то есть от $\alpha = a - \varepsilon$ до $\beta = a + \varepsilon$.

Раздел II. Математическая статистика

Тема 8. Вариационные ряды

Вариационный ряд как результат первичной обработки данных наблюдений. Дискретный и интервальный ряды. Средняя арифметическая и дисперсия вариационного ряда, упрощенный способ их вычисления [1, § 8.1–8.4].

Прежде чем непосредственно изучать выборочный метод, необходимо ознакомиться с простейшей статистической обработкой опытных данных, построением вариационных рядов и вычислением их числовых характеристик.

Вариационный ряд является статистическим аналогом (реализацией) распределения признака (случайной величины), а его числовые характеристики (средняя арифметическая $\overline{x}$ и дисперсия s^2) – аналогами соответствующих числовых характеристик случайной величины – математического ожидания $M(X)$ и дисперсии $D(X)$. Точно так же понятие частости (относительной частоты) w для вариационного ряда аналогично понятию вероятности p для случайной величины.

Необходимо четко знать формулы вычисления числовых характеристик ряда [1, § 8.2, 8.3]. Более сложные формулы, используемые в упрощенном способе расчета [1, § 8.4], являются вспомогательными. Их сложность объясняется переходом в расчетах от рассматриваемых вариантов к условным.

Однако некоторое усложнение нахождения числовых характеристик по этим формулам компенсируется снижением трудоемкости расчетов за счет существенного упрощения условных вариантов по сравнению с исходными.

Тема 9. Основы выборочного метода

Сплошное и выборочное наблюдения. Генеральная и выборочная совокупности. Собственно-случайная выборка с повторным и бесповторным отбором членов. Репрезентативная выборка. Понятие об оценке параметров генеральной совокупности. Свойства оценок: несмещенность, состоятельность и эффективность. Оценка генеральных доли и средней по собственно-случайной выборке. Несмещенность и состоятельность выборочных доли и средней. Смещенность и состоятельность выборочной дисперсии как оценки генеральной дисперсии. Интервальная оценка параметров. Доверительная вероятность, надежность оценки и предельная ошибка выборки. Формулы доверительных вероятностей для средней и доли. Объем выборки [1, § 9.1, 9.2, 9.4, 9.6].

Выборочный метод широко применяется на практике. Однако значение этой темы значительно шире, поскольку концепция выборки лежит в основе методологии математической статистики. Соотношение между характеристиками выборочной и генеральной совокупностей есть соотношение между опытными данными (результатами наблюдений) и теоретической моделью.

Чтобы иметь возможность по данным выборки судить о генеральной совокупности, она должна быть отобрана случайно. Поэтому выборочные характеристики – выборочные средняя $\bar{x}$, доля w и дисперсия s^2 – величины случайные, в отличие от их аналогов в генеральной совокупности $\bar{x}_0$, p и σ^2 – величин неслучайных.

Необходимо знать свойства выборочных оценок (несмещенность, состоятельность, эффективность) и уметь обосновывать несмещенность и состоятельность выборочных средней и доли. При этом следует помнить, что основное требование, предъявляемое к выборочной оценке θ_n, заключается в том, чтобы ее рассеяние относительно оцениваемого параметра θ, то есть $M(\theta_n-\theta)^2$, было минимальным. Для несмещенной оценки, для которой $M(\theta_n-\theta)^2=D(\theta_n)=\sigma^2_{\theta_n}$, это требование означает ее эффективность. Но даже «наилучшая» оценка является лишь приближенным значением неизвестного параметра и, будучи величиной случайной, может существенно отличаться от самого параметра.

Поэтому наряду с точечной рассматривают интервальную оценку параметра, то есть такой числовой интервал, который с заданной доверительной вероятностью (надежностью) накрывает неизвестное значение параметра. Программой предусматривается построение доверительного интервала для генеральной средней и генеральной доли собственно-случайных выборок (повторной и бесповторной). Основой являются формулы доверительной вероятности для средней и доли [1, формулы **(9.23)**, **(9.24)**].

Необходимо усвоить три типа задач на выборку, сводящиеся к определению предельной ошибки выборки или границ доверительного интервала, надежности оценки и объема выборки.

При решении задач на нахождение объема выборки следует учесть, что это не просто задачи на вычисление неизвестной величины n из формулы, выражающей предельную ошибку выборки через дисперсию признака. Ведь обычно объем выборки надо знать до проведения выборочного наблюдения, но в этом случае неизвестны не только дисперсии признака σ^2 или pq, но даже их оценки. Поэтому вместо неизвестных значений σ^2 или pq берут выборочные характеристики s^2 или $w(1-w)$ предшествующего исследования в аналогичных условиях, то есть полагают, что $\sigma^2 \approx s^2, \quad p \approx w.$ Если никаких сведений о σ^2 или p нет, то в качестве σ^2 или p используют их выборочные оценки по специальной пробной выборке небольшого объема и по формулам **(9.33)–(9.36)** находят объем основной выборки. При оценке генеральной доли p вместо проведения пробной выборки можно в формулах объема выборки произведение $pq = p(1-p)$ заменить его максимальным значением, равным 0,25.

Если по условию задачи объем бесповторной выборки значительно меньше объема генеральной совокупности или генеральная совокупность бесконечна, то расчет необходимых характеристик проводят по формулам для повторной выборки.

Тема 10. Элементы проверки статистических гипотез

Статистическая гипотеза и статистический критерий. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень значимости и мощность критерия. Принцип практической уверенности. Оценка параметров законов распределения по выборочным данным. Понятие о критериях согласия. χ^2 -критерий Пирсона и схема его применения [1, § 10.1, 10.2, 10.7].

Проверка статистических гипотез – один из наиболее часто используемых на практике разделов математической статистики. Необходимо усвоить такие понятия, как статистическая гипотеза и статистический критерий, ошибки 1-го и 2-го рода, уровень значимости и мощность критерия.

Важнейшим вопросом темы является построение теоретического закона распределения (выбор типа закона и оценка его параметров) по опытным данным и оценка его расхождения (согласия) с эмпирическим распределением. Необходимо уяснить суть критериев согласия, позволяющих установить (на данном уровне значимости), объясняется ли расхождение между эмпирическим и теоретическим распределением лишь случайными причинами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они являются существенными и связаны с тем, что теоретический закон распределения подобран неудачно.

Необходимо знать критерии согласия, в частности χ^2-критерий Пирсона и схему его применения.

Тема 11. Элементы теории корреляции

Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Уравнения регрессии, корреляционная таблица. Групповые средние. Основные задачи теории корреляции: определение формы и оценка тесноты связи. Линейная парная регрессия. Определение параметров прямых регрессий методом наименьших квадратов. Выборочная ковариация. Формулы расчета коэффициентов регрессии. Выборочный коэффициент корреляции, его свойства и оценка достоверности (*значимости*). *Понятие о нелинейной и множественной корреляции* [1, § 12.1–12.3, 12.5].

Корреляционный анализ наряду с выборочным методом представляет собой важнейшее прикладное направление математической статистики. Предметом его исследования является связь (зависимость) между различными варьирующими признаками (переменными величинами), при которой каждому значению одной переменной соответствует не определенное значение другой (как это имеет место при функциональной зависимости), а распределение другой переменной с определенным условным математическим ожиданием.

При изучении темы следует уяснить сущность статистической зависимости и ее частного случая – корреляционной зависимости.

Конечная цель корреляционного анализа – получение уравнений прямых регрессий, характеризующих форму зависимости, и вычисление коэффициента корреляции, определяющего тесноту (силу) связи, если она линейная.

Расчет производится в два этапа. На первом этапе обрабатывают табличные данные для нахождения величин выборочных средних $\overline{x}$, $\overline{y}$, дисперсий s_x^2, s_y^2 и выборочной ковариации μ. При этом рекомендуется использовать упрощенный способ их расчета

[1, § 12.2]. Второй этап – вычисление основных характеристик корреляционной зависимости (коэффициентов регрессии b_{yx}, b_{xy}, коэффициента корреляции r) и оценка их достоверности.

При решении задачи 3 контрольной работы № 4 следует учесть, что прямые регрессии должны быть построены на одном чертеже с эмпирическими линиями (ломаными) регрессии. Причем они должны образовывать с осью Ox либо только острые, либо только тупые углы и пересекаться в точке $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$.

Все расчеты необходимо проводить с разумной степенью точности, используя правила приближенных вычислений и сохраняя в промежуточных вычислениях на один-два десятичных знака больше, чем в окончательном ответе (правило запасной цифры).

Вопросы для самопроверки

1. Классификация случайных событий. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности события, непосредственный подсчет вероятности. Примеры.

2. Статистическое определение вероятности события и условия его применимости. Пример.

3. Несовместные и совместные события. Сумма событий. Теорема сложения вероятностей (с доказательством). Пример.

4. Полная группа событий. Противоположные события. Соотношение между вероятностями противоположных событий (с выводом). Примеры.

5. Зависимые и независимые события. Произведение событий. Понятие условной вероятности. Теорема умножения вероятностей (с доказательством). Примеры.

6. Формулы полной вероятности и Байеса (с доказательством). Примеры.

7. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли (с выводом). Примеры.

8. Локальная теорема Муавра–Лапласа, условия ее применимости. Свойства функции $f(x)$. Пример.

9. Асимптотическая формула Пуассона и условия ее применимости. Пример.

10. Интегральная теорема Муавра—Лапласа и условия ее применимости. Функция Лапласа $\Phi(x)$ и ее свойства. Пример.

11. Следствия из интегральной теоремы Муавра–Лапласа (с выводом). Примеры.

12. Понятие случайной величины и ее описание. Дискретная случайная величина и закон (ряд) ее распределения. Независимые случайные величины. Примеры.

13. Математические операции над дискретными случайными величинами. Примеры построения законов распределения для kX, X^2, $X + Y$, XY по заданным распределениям независимых случайных величин X и Y.

14. Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства (с выводом). Примеры.

15. Дисперсия дискретной случайной величины и ее свойства (с выводом). Примеры.

16. Математическое ожидание и дисперсия числа и частости наступлений события в n повторных независимых испытаниях (с выводом).

17. Случайная величина, распределенная по биномиальному закону, ее математическое ожидание и дисперсия. Закон распределения Пуассона.

18. Функция распределения случайной величины, ее определение, свойства и график.

19. Непрерывная случайная величина (НСВ). Вероятность отдельно взятого значения НСВ. Математическое ожидание и дисперсия НСВ.

20. Плотность вероятности непрерывной случайной величины, ее определение, свойства и график.

21. Определение нормального закона распределения. Теоретико-вероятностный смысл его параметров. Нормальная кривая и зависимость ее положения и формы от параметров.

22. Функция распределения нормально распределенной случайной величины и ее выражение через функцию Лапласа.

23. Формулы для определения вероятности: а) попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал;

б) ее отклонения от математического ожидания. Правило «трех сигм».

24. Центральная предельная теорема. Понятие о теореме Ляпунова и ее значение. Пример.

25. Понятие двумерной (n-мерной) случайной величины. Примеры. Таблица ее распределения. Одномерные распределения ее составляющих. Условные распределения и их нахождение по таблице распределения.

26. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин. Связь между некоррелированностью и независимостью случайных величин.

27. Понятие о двумерном нормальном законе распределения. Условные математические ожидания и дисперсии.

28. Неравенство Маркова (лемма Чебышева) (с выводом). Пример.

29. Неравенство Чебышева (с выводом) и его частные случаи для случайной величины, распределенной по биномиальному закону, и частости события.

30. Неравенство Чебышева для средней арифметической случайных величин (с выводом).

31. Теорема Чебышева (с доказательством), ее значение и следствие. Пример.

32. Закон больших чисел. Теорема Бернулли (с доказательством) и ее значение. Пример.

33. Вариационный ряд и его разновидности. Средняя арифметическая и дисперсия ряда, упрощенный способ их расчета.

34. Генеральная и выборочная совокупности. Принцип образования выборки. Собственно-случайная выборка с повторным и бесповторным отбором членов. Репрезентативная выборка. Основная задача выборочного метода.

35. Понятие об оценке параметров генеральной совокупности. Свойства оценок: несмещенность, состоятельность, эффективность.

36. Оценка генеральной доли по собственно-случайной выборке. Несмещенность и состоятельность выборочной доли.

37. Оценка генеральной средней по собственно-случайной выборке. Несмещенность и состоятельность выборочной средней.

38. Оценка генеральной дисперсии по собственно-случайной выборке. Смещенность и состоятельность выборочной дисперсии (без вывода). Исправленная выборочная дисперсия.

39. Понятие об интервальном оценивании. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Предельная ошибка выборки. Ошибки репрезентативности выборки (случайные и систематические).

40. Формула доверительной вероятности при оценке генеральной доли признака. Средняя квадратическая ошибка повторной и бесповторной выборок и построение доверительного интервала для генеральной доли признака.

41. Формула доверительной вероятности при оценке генеральной средней. Средняя квадратическая ошибка повторной и бесповторной выборок и построение доверительного интервала для генеральной средней.

42. Определение необходимого объема повторной и бесповторной выборок при оценке генеральных средней и доли.

43. Статистическая гипотеза и статистический критерий. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень значимости и мощность критерия. Принцип практической уверенности.

44. Построение теоретического закона распределения по опытным данным.

45. Понятие о критериях согласия. χ^2-критерий Пирсона и схема его применения.

46. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости, различия между ними. Основные задачи теории корреляции.

47. Линейная парная регрессия. Система нормальных уравнений для определения параметров прямых регрессии. Выборочная ковариация. Формулы для расчета коэффициентов регрессии.

48. Оценка тесноты связи. Коэффициент корреляции (выборочный), его свойства и оценка достоверности.

Задачи для самоподготовки

Ниже приводятся номера рекомендуемых задач с решениями и для самостоятельного выполнения по учебнику [1]. Студентам рекомендуется в первую очередь разобрать задачи с решениями, а затем выборочно решить задачи для самостоятельного выполнения (например, каждую вторую задачу из списка задач по теме).

Тема	Номера задач по учебнику [1]	
	с решениями	для самостоятельного выполнения
Раздел I. Теория вероятностей		
1. Классификация событий	1.1, 1.10–1.16	1.37–1.49
2. Основные теоремы	1.17–1.31, 1.34, 1.35	1.53–1.78
3. Повторные независимые испытания	2.1–2.12	2.13–2.34
4. Дискретные случайные величины	3.1–3.10, 3.18, 3.19а, 3.20–22, 4.1, 4.2, 4.5	3.25–3.46, 3.49–3.61, 4.11–4.16
5. Непрерывные случайные величины. Нормальный закон распределения	3.11–3.14, 3.24, 4.9	3.47, 3.48, 3.62–3.66, 4.19–4.23
6. Двумерные (*n*-мерные) случайные величины	5.2, 5.5	5.10, 5.14
7. Закон больших чисел	6.1–6.4, 6.6–6.8	6.9–6.22
Раздел II. Математическая статистика		
8. Вариационные ряды	8.2, 8.3, 8.6, 8.8	8.10–8.12
9. Основы выборочного метода	9.6, 9.7, 9.10–9.13	9.19–9.27, 9.30
10. Элементы проверки статистических гипотез	10.12	10.28–10.30
11. Элементы теории корреляции	12.1–12.6	12.14–12.18

Указания по выполнению контрольных работ

В соответствии с учебным планом по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» каждый студент должен выполнить две контрольные работы — № 3 и № 4. Контрольная работа № 3 охватывает материал курса, соответствующий разделу

«Теория вероятностей», а контрольная работа № 4 — материал раздела «Математическая статистика».

Обе контрольные работы (№ 3 и № 4) студенты и вечерних и дневных групп выполняют дома по приведенным в данном пособии вариантам и направляют в институт для проверки в сроки, установленные индивидуальным графиком студента. Однако эти сроки являются крайними. Поэтому, чтобы работа была своевременно проверена, при необходимости доработана и сдана повторно, ее надлежит выслать значительно раньше указанного срока.

Студентам дневных групп рекомендуется во время установочной (зимней экзаменационной) сессии вчерне выполнить домашнюю контрольную работу № 3 (№ 4), чтобы получить консультацию по возникшим вопросам. В течение двух недель после окончания сессии контрольная работа должна быть завершена и представлена на проверку.

Если контрольная работа имеет существенные недочеты и требуется повторное решение задач, то она получает оценку «Не допускается к собеседованию». Такую работу необходимо переделать в соответствии с замечаниями преподавателя, проверившего работу. Работа выполняется в той же (если есть место) или в новой тетради с надписью «Повторная» и вместе с первоначальной работой направляется для проверки. На обложке тетради необходимо указать фамилию преподавателя, которым работа ранее была не зачтена.

Если работа оценивается положительно, то на ней делается запись «Допускается к собеседованию». При этом в работе могут иметь место отдельные недочеты или ошибки, которые следует устранить. Выполненную работу над ошибками необходимо представить преподавателю на собеседовании.

Собеседование проходят все студенты по каждой контрольной работе, оцененной положительно. Время проведения собеседования устанавливается территориальным подразделением (филиалом). Если со студентом дневной группы собеседование не проводилось в межсессионный период, то оно будет проведено во время экзаменационной сессии. В ходе собеседования проверяется самостоятельность выполнения работы, выявляется знание основных теоретических положений учебно-программного материала, охватываемого данной работой.

По результатам собеседования ставится зачет или незачет. К экзамену допускаются только те студенты, которые успешно прошли собеседование по двум контрольным работам (№ 3 и № 4).

Замечание. В соответствии с учебным планом по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» может быть предусмотрено компьютерное тестирование. В этом случае дополнительным обязательным условием допуска к экзамену является положительная оценка студентов на тестировании.

Основные требования к выполнению и оформлению контрольной работы

Прежде чем приступить к решению задачи, необходимо переписать ее условие, а затем после слова «Решение» привести решение, к каждому этапу которого должны быть даны развернутые объяснения и описание вводимых обозначений. Используемые формулы и теоремы должны записываться с необходимыми пояснениями. Окончательный ответ следует выделить и сформулировать словесно.

Все расчеты нужно проводить тщательно, применяя правила приближенных вычислений[1] . Учитывая, что используемые при решении задач таблицы являются четырехзначными, все промежуточные вычисления следует проводить с четырьмя верными знаками после запятой, а окончательный ответ – дать с тремя верными знаками, правильно округлив полученный до этого результат.

При выполнении громоздких расчетов, связанных с обработкой вариационных рядов и корреляционных таблиц, рекомендуется воспользоваться упрощенной схемой вычислений [1, § 8.4, 12.2]. Прежде чем приступить к решению задачи 2 контрольной работы № 4, ознакомьтесь с замечанием, приведенным в учебнике [1, § 10.7].

В конце работы указывается список использованной литературы, ставятся дата ее окончания и подпись. Поля в тетради, в которой выполняется работа, должны быть не менее 3 см.

[1] Математический анализ и линейная алгебра: учебно-методическое пособие для студентов I курса всех специальностей и слушателей факультета непрерывного обучения / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Вузовский учебник, 2010. – С. 9, 10.

Зачетные контрольные работы хранятся у студента и обязательно предъявляются на экзамене. В случае успешной сдачи экзамена эти работы остаются у экзаменатора.

Ниже приведены варианты заданий контрольных работ № 3 и № 4.

Индивидуальный номер варианта контрольной работы соответствует последней цифре номера личного дела студента, который совпадает с номером зачетной книжки и студенческого билета.

Контрольная работа не рассматривается, если ее вариант не совпадает с последней цифрой номера личного дела студента или она выполнена по вариантам прошлых лет.

Варианты контрольных работ[1]

Вариант 1

(*для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 1*)

Контрольная работа № 3

1. Из 40 вопросов курса высшей математики студент знает 32. На экзамене ему случайным образом предлагаются два вопроса.

Какова вероятность того, что студент ответит правильно:

а) хотя бы на один вопрос;

б) на оба вопроса?

2. При высаживании рассады помидоров только 80% приживается.

Найти вероятность того, что из шести высаженных растений приживется не менее пяти.

3. Человек, проходящий мимо киоска, покупает газету с вероятностью 0,2.

Найти вероятность того, что из 400 человек, прошедших мимо киоска в течение часа:

а) купят газету 90 человек;

б) не купят газету от 300 до 340 человек (включительно).

4. Пульт охраны связан с тремя охраняемыми объектами. Вероятность поступления сигнала с этих объектов составляет 0,2, 0,3 и 0,6 соответственно.

---

[1] Напоминаем, что номер личного дела студента совпадает с номером его зачетной книжки и студенческого билета.

Составить закон распределения случайной величины – числа объектов, с которых поступит сигнал.

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

5. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<1,\\ \dfrac{1}{4} & \text{при} \quad 1\le x\le b,\\ 0 & \text{при} \quad x>b.\end{cases}$$

Найти:

а) параметр b;

б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X;

в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что случайная величина принимает значения на промежутке [1,5; 4,5].

Вычислить эту вероятность с помощью функции распределения. Объяснить различие результатов.

Контрольная работа № 4

1. С целью определения средней продолжительности обслуживания клиентов в пенсионном фонде, число клиентов которого очень велико, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено обследование 100 клиентов. Результаты обследования представлены в таблице.

Время обслуживания, мин	Менее 2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	Более 12	Итого
Число клиентов	6	10	21	39	15	6	3	100

Найти:

а) границы, в которых с вероятностью 0,9946 заключено среднее время обслуживания всех клиентов пенсионного фонда;

б) вероятность того, что доля всех клиентов фонда с продолжительностью обслуживания менее 6 минут отличается от доли таких клиентов в выборке не более чем на 10% (по абсолютной величине);

в) объем повторной выборки, при котором с вероятностью 0,9907 можно утверждать, что доля всех клиентов фонда с продолжительностью обслуживания менее 6 минут отличается от доли таких клиентов в выборке не более чем на 10% (по абсолютной величине).

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X – время обслуживания клиентов – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 50 предприятий пищевой промышленности по степени автоматизации производства X (%) и росту производительности труда Y (%) представлено в таблице.

x \ y	5–9	9–13	13–17	17–21	21–25	Итого
15–21	3	2	1			6
21–27	1	2	3	2		8
27–33		2	7	3		12
33–39		2	5	8		15
39–45			2	2	1	5
45–51				2	2	4
Итого	4	8	18	17	3	50

Необходимо:

1. Вычислить групповые средние $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии.

2. Предполагая, что между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными X и Y;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить рост производительности труда при степени автоматизации производства 43%.

Вариант 2

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 2)

Контрольная работа № 3

1. На складе имеется 20 приборов, из которых два неисправны. При отправке потребителю проверяется исправность приборов.

Найти вероятность того, что три первых проверенных прибора окажутся исправными.

2. В типографии имеется пять плоскопечатных машин. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9.

Найти вероятность того, что в данный момент работает:

а) две машины;

б) хотя бы одна машина.

3. При выпуске телевизоров количество экземпляров высшего качества в среднем составляет 80%. Выпущено 400 телевизоров.

Найти:

а) вероятность того, что 300 из выпущенных телевизоров высшего качества;

б) границы, в которых с вероятностью 0,9907 заключена доля телевизоров высшего качества.

4. В партии из восьми деталей шесть стандартных. Наугад отбирают две детали.

Составить закон распределения случайной величины – числа стандартных деталей среди отобранных. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения.

5. Две непрерывные случайные величины заданы функциями распределения:

$$F_1(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \dfrac{x}{3} & \text{при} \quad 0\le x\le 3,\\ 0 & \text{при} \quad x>3,\end{cases} \qquad F_2(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \dfrac{x}{5} & \text{при} \quad 0\le x\le 5,\\ 1 & \text{при} \quad x>5.\end{cases}$$

Найти математические ожидания этих величин. Для какой из них вероятность попадания в интервал (2; 4) больше?

Используя неравенство Маркова, оценить для каждой случайной величины вероятность того, что она примет значение:

а) больше 2; б) не больше 3.

Контрольная работа № 4

1. Из 1560 сотрудников предприятия по схеме собственно-случайной бесповторной выборки отобрано 100 человек для получения статистических данных о пребывании на больничном листе в течение года. Полученные данные представлены в таблице.

Количество дней пребывания на больничном листе	Менее 3	3–5	5–7	7–9	9–11	Более 11	Итого
Число сотрудников	6	13	24	39	8	10	100

Найти:

а) вероятность того, что среднее число дней пребывания на больничном листе среди сотрудников предприятия отличается от их среднего числа в выборке не более чем на один день (по абсолютной величине);

б) границы, в которых с вероятностью 0,95 заключена доля всех сотрудников, пребывающих на больничном листе не более семи дней;

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для доли (см. п. *б*)) можно гарантировать с вероятностью 0,98.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X – число дней пребывания сотрудников предприятия на больничном листе – распределена по нормальному закону.

Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 110 образцов полимерных композиционных материалов по содержанию в них нефтешламов X (%) и водопоглощению Y (%) представлено в таблице.

x \ y	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75	Итого
5–15	17	4					21
15–25	3	18	3				24
25–35		2	15	5			22
35–45			3	13	7		23
45–55					6	14	20
Итого	20	24	21	18	13	14	110

Необходимо:

1. Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии.

2. Предполагая, что между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать содержательную интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными X и Y;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить средний процент водопоглощения в образцах, содержащих 35% нефтешламов.

Вариант 3

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 3)

Контрольная работа № 3

1. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,9, второе – 0,95, третье – 0,85.

Найти вероятность того, что при аварии сработает:

а) только одно устройство;

б) два устройства;

в) хотя бы одно устройство.

2. В каждом испытании некоторое событие A происходит с вероятностью $p = 0{,}5$. Произведено 1600 независимых испытаний.

Найти границы для частости, симметричные относительно p, которые можно гарантировать с вероятностью 0,95.

3. Каждый пятый клиент банка приходит брать проценты с вклада. Сейчас в банке ожидают своей очереди обслуживания пять человек.

Составить закон распределения числа клиентов, которые пришли снять проценты с вклада. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

4. На двух станках получают детали одинаковой номенклатуры. Случайные величины X и Y – число бракованных деталей в партиях деталей за смену, произведенных на каждом из станков, – характеризуются следующими законами распределения:

X:

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,5	0,2

Y:

y_j	0	1	2
p_j	0,6	0,3	0,1

Составить закон распределения случайной величины Z – общего числа бракованных деталей в объединенной партии деталей, произведенных на двух станках. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения.

5. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{18}}.$$

Известно, что вероятность $P(X > 4) = 0{,}5$.

Найти:

а) параметр a;

б) дисперсию $D(X)$;

в) вероятность $P(2 \le X \le 5)$;

г) функции распределения $F(x)$.

Контрольная работа № 4

1. В некотором городе по схеме собственно-случайной бесповторной выборки было обследовано 80 магазинов розничной торговли из 2500 с целью изучения объема розничного товарооборота. Получены следующие данные.

Товарооборот, у.е.	Менее 60	60–70	70–80	80–90	90–100	Более 100	Итого
Число магазинов	12	19	23	18	5	3	80

Найти:

а) вероятность того, что средний объем розничного товарооборота во всех магазинах города отличается от среднего объема розничного товарооборота, полученного в выборке, не более чем на 4 у.е. (по абсолютной величине);

б) границы, в которых с вероятностью 0,98 заключена доля магазинов с объемом розничного товарооборота от 60 до 90 у.е.;

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего объема розничного товарооборота (см. п. *а*) можно гарантировать с вероятностью 0,95.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X – объем розничного товарооборота – распределена по нормальному закону.

Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Имеются следующие выборочные данные о рыночной стоимости квартир Y (тыс. у.е.) и их общей площади X (м^2).

x \ y	13–18	18–23	23–28	28–33	33–38	Итого
33–49	4	2	1			7
49–65	2	6	4	1		13
65–81	1	4	9	4	1	19
81–97			3	6	3	12
97–113			1	3	5	9
Итого	7	12	18	14	9	60

Необходимо:

1. Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии.

2. Предполагая, что между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости $\alpha = 0,05$ оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными X и Y;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить стоимость квартиры общей площадью 75 м^2.

Вариант 4

(*для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 4*)

Контрольная работа № 3

1. В магазине в течение дня было продано 20 из 25 микроволновых печей трех различных производителей, имевшихся в количествах 5, 7 и 13 штук.

Какова вероятность того, что остались нераспроданными микроволновые печи одной марки, если вероятность быть проданной для каждой марки печи является одинаковой?

2. По статистике, в среднем каждая четвертая семья в регионе имеет компьютер.

Найти вероятность того, что из восьми наудачу выбранных семей имеют компьютер:

а) две семьи;

б) хотя бы две семьи.

3. Доля изделий высшего качества некоторой массовой продукции составляет 40%. Случайным образом отобрано 250 изделий.

Найти вероятность того, что:

а) 120 изделий будут высшего качества;

б) изделий высшего качества будет не менее 90 и не более 120.

4. Двигаясь по маршруту, автомобиль преодолевает два регулируемых перекрестка. Первый перекресток он преодолевает без остановки с вероятностью 0,4 и при этом условии второй перекресток проезжает без остановки с вероятностью 0,3. Если же на первом перекрестке автомобиль совершил остановку, то второй он проезжает без остановки с вероятностью 0,8.

Составить закон распределения случайной величины X – числа перекрестков, преодолеваемых автомобилем без остановки. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения.

5. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0, \\ ax^2 & \text{при} \quad 0<x\le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр a;

б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X;

в) функцию распределения $F(x)$.

С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что случайная величина принимает значения на промежутке [1; 2]. Вычислить эту вероятность с помощью функции распределения. Объяснить различие результатов.

Контрольная работа № 4

1. В результате выборочного обследования российских автомобилей, обслуживающихся в автосервисе по гарантии, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки из 280 автомобилей были отобраны 60. Полученные данные о пробеге автомобилей с момента покупки до первого гарантийного ремонта представлены в таблице.

Пробег, тыс. км	Менее 1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	Более 6	Итого
Число автомобилей	3	5	9	16	13	8	6	60

Найти:

а) вероятность того, что средний пробег всех автомобилей отличается от среднего пробега автомобилей в выборке не более чем на 400 км (по абсолютной величине);

б) границы, в которых с вероятностью 0,95 заключена доля автомобилей, пробег которых составляет менее 3 тыс. км;

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для доли (см. п. *б*), можно гарантировать с вероятностью 0,9876.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X – средний пробег автомобиля до гарантийного ремонта – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 60 банков по величине процентной ставки X (%) и размеру выданных кредитов Y (млн руб.) представлено в таблице.

x \ y	2–5	5–8	8–11	11–14	14–17	Итого
11–13				1	6	7
13–15			4	7	3	14
15–17		1	11	5	1	18
17–19	4	5	2			11
19–21	8	2				10
Итого	12	8	17	13	10	60

Необходимо:

1. Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии.

2. Предполагая, что между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными X и Y;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, определить средний размер выданного банком кредита, процентная ставка которого равна 16%.

Вариант 5

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 5)

Контрольная работа № 3

1. Ребенок играет кубиками, на которых написаны буквы: О, А, К, И, А, Р, Ш.

Найти вероятность того, что произвольно поставленные в ряд пять букв образуют слово «ШАРИК».

2. При тестировании качества радиодеталей установлено, что на каждые 10 000 радиодеталей в среднем приходится четыре бракованных.

Определить вероятность того, что при проверке 5000 радиодеталей будет обнаружено:

а) не менее трех бракованных деталей;

б) не менее одной и не более трех бракованных деталей.

3. Вероятность гибели саженца составляет 0,4.

Составить закон распределения числа прижившихся саженцев из имеющихся четырех. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и функцию распределения этой случайной величины.

4. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения:

X:

x_i	–1	4
p_i	0,3	?

Y:

y_j	–2	0	3
p_j	0,1	0,4	?

Найти вероятности $P(X=4)$ и $P(Y=3)$. Составить закон распределения случайной величины $Z=2X(Y+3)$ и проверить свойство математического ожидания $M\left[2X(Y+3)\right]=2M(X)M(Y)+6M(X)$.

5. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \dfrac{x}{2} & \text{при} \quad 0<x\le 2,\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;

в) вероятность $P(0 < X < 1)$.

Построить графики функций $\varphi(x)$ и $F(x)$.

С помощью неравенства Маркова оценить вероятности того, что случайная величина X примет значения:

а) больше 6;

б) не больше 5/3.

Найти те же вероятности с помощью функции распределения и объяснить различие результатов.

Контрольная работа № 4

1. В филиале заочного вуза обучается 2000 студентов. Для изучения стажа работы студентов по специальности по схеме собственно-случайной бесповторной выборки отобрано 100 студентов. Полученные данные о стаже работы студентов по специальности представлены в таблице.

Стаж работы по специальности, лет	Менее 2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	Более 12	Итого
Количество студентов	10	19	24	27	12	5	3	100

Найти:

а) вероятность того, что доля всех студентов филиала, имеющих стаж работы менее шести лет, отличается от выборочной доли таких студентов не более чем на 5% (по абсолютной величине);

б) границы, в которых с вероятностью 0,997 заключен средний стаж работы по специальности всех студентов филиала;

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего стажа работы по специальности (см. п. *б*) можно гарантировать с вероятностью 0,9898.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X – стаж работы студентов по специальности – распределена по нормальному закону.

Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 100 предприятий по количеству работников Y (чел.) и величине средней месячной надбавки к заработной плате X (%) представлено в таблице.

x \ y	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	Итого
7,5–12,5				6	4	10
12,5–17,5			6	6	2	14
17,5–22,5			10	2		12
22,5–27,5	3	6	8	2		19
27,5–32,5	4	11	10			25
32,5–37,5	10	6	4			20
Итого	17	23	38	16	6	100

Необходимо:

1. Вычислить групповые средние $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии.

2. Предполагая, что между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными X и Y;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить среднюю месячную надбавку к заработной плате при числе работников предприятия 46 человек.

Вариант 6

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 6)

Контрольная работа № 3

1. Вероятности того, что каждый из трех кассиров занят обслуживанием покупателей, равны соответственно 0,7; 0,8; 0,9.

Найти вероятность того, что в данный момент заняты обслуживанием покупателей:

а) все кассиры;

б) только один кассир;

в) хотя бы один кассир.

2. На заочном отделении вуза 80% всех студентов работают по специальности.

Какова вероятность того, что из пяти отобранных случайным образом студентов по специальности работают:

а) два студента;

б) хотя бы один студент?

3. На почту поступило 8000 писем. Вероятность того, что на случайно взятом конверте отсутствует почтовый индекс, равна 0,0005.

Найти вероятность того, что почтовый индекс отсутствует:

а) на трех конвертах;

б) не менее чем на трех конвертах.

4. У торгового агента имеется пять адресов потенциальных покупателей, к которым он обращается с предложением приобрести реализуемый его фирмой товар. Вероятность согласия потенциальных покупателей оценивается соответственно как 0,5; 0,4; 0,4; 0,3; 0,25. Агент обращается к ним в указанном порядке до тех пор, пока кто-нибудь не согласится приобрести товар.

Составить закон распределения случайной величины – числа покупателей, к которым придется обратиться торговому агенту. Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины.

5. Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины X имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}.$$

Найти:

а) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X;

б) вероятность $P(-1 \le X \le 0)$;

в) вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания не превысит 2,5 (по абсолютной величине).

Контрольная работа № 4

1. Имеются выборочные данные о распределении вкладчиков по размеру вклада в Сбербанке города.

Размер вклада, тыс. руб.	До 40	40–60	60–80	80–100	Свыше 100	Итого
Число вкладов	32	56	92	120	100	400

Найти:

а) вероятность того, что средний размер вклада в Сбербанке отличается от среднего размера вклада в выборке не более чем на 5 тыс. руб. (по абсолютной величине);

б) границы, в которых с вероятностью 0,95 заключена доля вкладов, размер которых менее 60 тыс. руб.;

в) объем повторной выборки, при которой те же границы для доли вкладов (см. п. *б*) можно гарантировать с вероятностью 0,9876; дать ответ на тот же вопрос, если никаких предварительных данных о рассматриваемой доле нет.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X – размер вклада в Сбербанке – распределена по нормальному закону.

Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 110 предприятий по стоимости основных производственных фондов X (млн руб.) и стоимости произведенной продукции Y (млн руб.) представлено в таблице.

y / x	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75	Итого
5–15	17	4					21
15–25	3	18	3				24
25–35		2	15	5			22
35–45			3	13	7		23
45–55					6	14	20
Итого	20	24	21	18	13	14	110

Необходимо:

1. Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии.

2. Предполагая, что между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными X и Y;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, определить среднюю стоимость произведенной продукции, если стоимость основных производственных фондов составляет 45 млн руб.

Вариант 7

(*для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 7*)

Контрольная работа № 3

1. В цехе изготавливаются однотипные изделия на трех станках, которые производят соответственно 50, 35 и 15% изделий от общего их числа. Брак составляет соответственно 2, 3 и 5%. Наудачу взятое изделие из партии нерассортированной продукции оказалось бракованным.

На каком станке вероятнее всего изготовлено это изделие?

2. Вероятность того, что менеджер фирмы находится в командировке, равна 0,7.

Найти вероятность того, что из пяти менеджеров находятся в командировке:

а) не менее трех менеджеров;

б) два менеджера.

3. Проводится испытание нового оружия. Основным показателем служит частость попадания по стандартной мишени при заданном комплексе условий. Разработчики утверждают, что вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8.

Какое количество выстрелов по мишени необходимо сделать, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что частость попадания отклонится от вероятности попадания при каждом выстреле не более чем на 0,01 (по абсолютной величине)?

4. В стопке из шести книг три книги по математике и три по информатике. Выбирают наудачу три книги.

Составить закон распределения числа книг по математике среди отобранных. Найти математическое ожидание и функцию распределения этой случайной величины.

5. Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины X имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-14)^2}{32}}.$$

В какой интервал (6; 8) или (18; 20) эта случайная величина попадает с большей вероятностью?

Контрольная работа № 4

1. В результате выборочного обследования 100 предприятий региона из 500 по схеме собственно-случайной бесповторной выборки получено следующее распределение снижения затрат на производство продукции в процентах к предыдущему году.

Снижение затрат, %	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16	Итого
Число предприятий	6	20	31	24	13	6	100

Найти:

а) границы, в которых с вероятностью 0,907 будет находиться средний процент снижения затрат на всех 500 предприятиях;

б) вероятность того, что доля всех предприятий, затраты которых снижены не менее чем на 10%, отличается от доли таких предприятий в выборке не более чем на 0,04 (по абсолютной величине);

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего процента снижения затрат (см. п. *а*) можно гарантировать с вероятностью 0,9876.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X – процент снижения затрат – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 60 предприятий по объему инвестиций в развитие производства X (млн руб.) и получаемой за год прибыли Y (млн руб.) представлено в таблице.

y / x	0–0,8	0,8–1,6	1,6–2,4	2,4–3,2	3,2–4,0	Итого
2–4	2	2				4
4–6	2	7	10			19
6–8		2	17	7		26
8–10			4	3	2	9
10–12					2	2
Итого	4	11	31	10	4	60

Необходимо:

1. Вычислить групповые средние $\overline{x_i}$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии.

2. Предполагая, что между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными X и Y;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить полученную прибыль при объеме инвестиций 5 млн руб.

Вариант 8

(*для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 8*)

Контрольная работа № 3

1. В двух ящиках находится по 16 деталей. Причем в первом ящике находится 9 стандартных деталей, а во втором – 12. Из первого ящика наугад извлекли одну деталь и переложили во второй ящик.

Найти вероятность того, что деталь, наугад извлеченная после этого из второго ящика, будет стандартной.

2. Электронная система состоит из 2000 элементов. Вероятность отказа любого из них в течение года равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов.

Найти вероятность отказа за год работы:

а) двух элементов;

б) не менее двух элементов.

3. При установившемся технологическом процессе среди изготавливаемой продукции оказывается в среднем 15% бракованных шин.

Сколько шин нужно отобрать для проверки, чтобы с вероятностью 0,9876 число бракованных шин отклонилось от своего среднего значения не более чем на 15 штук?

4. Даны две случайные величины X и Y, причем X имеет биномиальное распределение с параметрами $p = 0{,}2$ и $n = 5$, а Y – распределение Пуассона с параметром $\lambda = 0{,}5$. Пусть $Z = 2X - Y$.

Необходимо:

а) найти математическое ожидание $M(Z)$ и дисперсию $D(Z)$;

б) оценить вероятность $P(1 \le Z \le 2)$ с помощью неравенства Чебышева.

5. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2, \\ a(x-2) & \text{при} \quad 2 < x \le 2{,}5, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2{,}5. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр a;

б) плотность вероятности $\varphi(x)$;

в) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Построить графики функций $\varphi(x)$ и $F(x)$.

Контрольная работа № 4

1. С целью изучения дневной выработки ткани (м) по схеме собственно-случайной бесповторной выборки было отобрано 100 ткачих комбината из 2000. Результаты обследования представлены в таблице.

Дневная выработка, м	Менее 55	55–65	65–75	75–85	85–95	95–105	Более 105	Итого
Число ткачих	8	7	15	35	20	8	7	100

Найти:

а) границы, в которых с вероятностью 0,9883 заключена средняя дневная выработка всех ткачих комбината;

б) вероятность того, что доля ткачих комбината, вырабатывающих в день не менее 85 м ткани, отличается от доли таких ткачих в выборке не более чем на 0,05 (по абсолютной величине);

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для средней дневной выработки (см. п. a) можно гарантировать с вероятностью 0,9942.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X – дневная выработка ткани – распределена по нормальному закону.

Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 50 однотипных предприятий по основным фондам X (млн руб.) и себестоимости единицы продукции Y (млн руб.) представлено в таблице.

x \ y	1	2	3	4	5	Итого
30–80			1	2	3	6
80–130			1	4	3	8
130–180		4	8	3	1	16
180–230	2	5	4			11
230–280	3	4	2			9
Итого	5	13	16	9	7	50

Необходимо:

1. Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии.

2. Предполагая, что между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными X и Y;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, определить себестоимость выпускаемой продукции на предприятии с основными фондами 270 млн руб.

Вариант 9

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 9)

Контрольная работа № 3

1. Даны отрезки длиной 2, 5, 6 и 10 см.

Какова вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков можно построить треугольник?

2. Вероятность поражения мишени стрелком равна 0,8.

Что вероятнее: поразить мишень семь раз при десяти выстрелах или 140 раз при двухстах выстрелах?

3. Возможность получения гарантированного урожая в зоне рискованного земледелия характеризуется вероятностью 0,3.

Найти интервал, в котором с вероятностью 0,9545 находится число сельскохозяйственных предприятий, получивших гарантированный урожай, из 500 имеющихся на данной территории.

4. Вероятность наличия нужного покупателю товара в первом магазине равна 0,6, во втором – 0,7, в третьем – 0,8, в четвертом – 0,85. Покупатель в указанной последовательности посещает эти магазины до тех пор, пока не найдет нужный ему товар.

Составить закон распределения случайной величины X – числа магазинов, которые придется посетить покупателю.

Найти:

а) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;

б) ее математическое ожидание и дисперсию.

5. Диаметр выпускаемой детали является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $a = 5$ см и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}02$ см.

Найти вероятность того, что из двух проверенных деталей диаметр хотя бы одной отклонится от математического ожидания не более чем на 0,04 см (по абсолютной величине).

Контрольная работа № 4

1. Для планирования бюджета предприятия на следующий год было проведено выборочное обследование использования амортизационного фонда. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки из 500 выплат были отобраны 100 и получены следующие данные.

Величина выплаты, руб.	Менее 1000	1000–2000	2000–3000	3000–4000	4000–5000	5000–6000	Итого
Число выплат	3	13	33	26	17	8	100

Найти:

а) вероятность того, что средняя выплата отличается от средней выплаты в выборке не более чем на 100 руб.;

б) границы, в которых с вероятностью 0,9281 заключена доля выплат, величина которых не превышает 4000 руб.;

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для доли (см. п. *б*) можно гарантировать с вероятностью 0,9545.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X – величина выплат – распределена по нормальному закону.

Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 50 городов по численности населения X (тыс. чел.) и среднемесячному доходу на одного человека Y (тыс. руб.) представлено в таблице.

x \ y	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	Более 8	Итого
30–50	1	1	3				5
50–70		2	5	1			8
70–90		1	1	6	2	2	12
90–110			4	9			13
110–130			2	2	5		9
Более 130					2	1	3
Итого	1	4	15	18	9	3	50

Необходимо:

1. Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии.

2. Предполагая, что между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными X и Y;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить средний доход на одного человека в городе с населением 100 тыс. человек.

Вариант 10

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 0)

Контрольная работа № 3

1. На первом станке обработано 20 деталей, из них семь с дефектами, на втором – 30, из них четыре с дефектами, на третьем – 50 деталей, из них 10 с дефектами. Все детали сложены вместе. Наудачу взятая деталь оказалась без дефектов.

Какова вероятность того, что она обработана на третьем станке?

2. Сколько семян следует взять, чтобы с вероятностью не менее чем 0,9545 быть уверенным, что частость взошедших семян будет отличаться от вероятности $p = 0{,}9$ не более чем на 2% (по абсолютной величине)?

3. Завод «Пино» (г. Новороссийск) отправил в Москву 2000 бутылок вина «Каберне». Вероятность того, что в пути может разбиться бутылка, равна 0,002.

Какова вероятность того, что в пути будет разбито не более пяти бутылок?

4. Одна из случайных величин (X) задана законом распределения:

X:

x_i	0	1	3
p_i	0,2	0,3	0,5

,

а другая (Y) имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 2, p = 0{,}4$.

Составить закон распределения их разности. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

5. Полагая, что длина изготавливаемой детали есть нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $M(X) = 10$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$, найти вероятность того, что длина наугад взятой детали заключена в интервале (5; 6).

В каких границах (симметричных относительно $M(X)$) будет заключена длина наугад взятой детали с вероятностью 0,95?

Контрольная работа № 4

1. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено 10%-ное обследование строительных организаций региона по объему выполненных работ. Результаты представлены в таблице.

Объем работ, млн руб.	Менее 56	56–60	60–64	64–68	68–72	Более 72	Итого
Число организаций	9	11	19	30	18	13	100

Найти:

а) границы, в которых с вероятностью 0,9973 заключен средний объем выполненных работ всех строительных организаций региона;

б) вероятность того, что доля всех строительных организаций, объем работ которых составляет не менее 60 млн руб., отличается от доли таких организаций в выборке не более чем на 0,05 (по абсолютной величине);

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего объема выполненных работ (см. п. *а*) можно гарантировать с вероятностью 0,9876.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X – объем выполненных работ – распределена по нормальному закону.

Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 100 средних фермерских хозяйств по числу наемных рабочих X (чел.) и их среднемесячной заработной плате на одного человека Y (тыс. руб.) представлено в таблице.

x \ y	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	Свыше 60	Итого
102						10	10
103					6	15	21
104			10	11	8		29
105			8	3			11
106		5	6				11
107	5	9	4				18
Итого	5	14	28	14	14	25	100

Необходимо:

1. Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии.

2. Предполагая, что между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными X и Y;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить среднемесячную заработную плату одного рабочего фермерского хозяйства, в котором работает 10 наемных рабочих.

Содержание

Предисловие 3
Литература 4
Содержание дисциплины и методические рекомендации по ее изучению 5

Раздел I. Теория вероятностей 6
Тема 1. Классификация событий 6
Тема 2. Основные теоремы 7
Тема 3. Повторные независимые испытания 8
Тема 4. Дискретные случайные величины 9
Тема 5. Непрерывные случайные величины. Нормальный закон распределения 11
Тема 6. Двумерные (n-мерные) случайные величины 12
Тема 7. Закон больших чисел 13

Раздел II. Математическая статистика 13
Тема 8. Вариационные ряды 13
Тема 9. Основы выборочного метода 14
Тема 10. Элементы проверки статистических гипотез 16
Тема 11. Элементы теории корреляции 17
Вопросы для самопроверки 18
Задачи для самоподготовки 21

Указания по выполнению контрольных работ 22
Основные требования к выполнению
и оформлению контрольной работы 24
Варианты контрольных работ 25
Вариант 1 25
Вариант 2 28
Вариант 3 30
Вариант 4 33
Вариант 5 36
Вариант 6 38
Вариант 7 41
Вариант 8 43
Вариант 9 46
Вариант 10 48

Теория вероятностей и математическая статистика. Учебно-методическое пособие для второго курса студентов всех специальностей, студентов бакалавриата всех направлений и слушателей факультета непрерывного обучения / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ВЗФЭИ, 2010.

Редактор Т.А. Балашова
Корректор Н.А. Буренок
Компьютерная верстка О.В. Белынской

ЛР ИД № 00009 от 25.08.99 г.

Подписано в печать 25.06.10. Формат $60\times90^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Усл.-печ. л. 3,5.
Изд. № 1/30-10.
Тираж 200 экз. Заказ № 1706.

Редакционно-издательский отдел
Всероссийского заочного
финансово-экономического института (ВЗФЭИ)
Олеко Дундича, 23, Москва, Г-96, ГСП-5, 123995

Для заметок

Для заметок