Закон больших чисел

Неравенство Маркова

Теорема. Если сл.в. X принимает только неотрицательные значения и имеет математическое ожидание, то для любого положительного числа A верно неравенство

$$P\left(X > A\right) \le \frac{M(X)}{A}.$$

Так как события $X > A$ и $X \le A$ противоположные, то $P(X > A) = 1 - P(X \le A)$ и неравенство Маркова принимает вид

Пример 1 (см. тетрадь)

Неравенство Чебышева

Теорема. Для произвольной сл.в. X имеющей математическое ожидание и дисперсию, справедливо неравенство

$$P\left(\left|X - M(X)\right| > \varepsilon\right) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Т.к. события $\left|X - M(X)\right| > \varepsilon$ и $\left|X - M(X)\right| \le \varepsilon$ противоположные, то неравенство Чебышева можно записать в другой форме

Следствия из неравенства Чебышева

1. Для сл.в. X, имеющей биномиальный закон распределения с математическим ожиданием $M(X) =$ и дисперсией $D(X) =$ вероятность того, что число m наступлений события A отличается от $M(X)$ не более чем на ε оценивается по формуле

$$P\left(\left|m - np\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}$$

2. Для частости – события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью $p = M\left(\frac{m}{n}\right)$, и имеющей дисперсию $D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}$ неравенство Чебышева запишется в форме

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

3. Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимы и $M(X_i) = a$, $D(X_i) = \sigma^2$. Тогда вероятность того, что среднее арифметическое этих величин отличается от их общего математического ожидания не более чем на ε (по абсолютной величине), оценивается по формуле

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

4. Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимы и $M(X_i) = a$, $D(X_i) \le C$, $C = const$. Тогда вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин отличается от среднего арифметического их математических ожиданий не более чем на ε (по абсолютной величине), оценивается по формуле

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Пример 2 (см. тетрадь)

Теорема Чебышева

Теорема. Если дисперсии n независимых сл.в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ограничены одной и той же постоянной $D(X_i) \le C,$ то при неограниченном увеличении числа n средняя арифметическая сл.в. сходится по вероятности к средней арифметической их математических ожиданий $a_1, a_2, \ldots, a_n$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| \le \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема Бернулли

Теорема. Частость события A в n повторных независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и тоже вероятностью p, при неограниченном увеличении числа n сходится по вероятности p этого события в отдельном испытании:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 1.$$

Теоремы Бернулли и Чебышева являются реализациями, так называемого, *закона больших чисел*, утверждающего, что *при проведении достаточно большого числа испытаний погрешности отдельных испытаний взаимно погашают друг друга (тем самым среднее арифметическое независимых случайных величин – результатов этих испытаний – стремится к постоянной величине при неограниченном увеличении числа испытаний).*