Методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными	Однородные уравнения	Уравнения, приводящиеся к однородным	Линейные уравнения	Уравнения Бернулли	Свойства логарифмов
$y' = P(x)\cdot Q(y)$ Алгоритм решения 1. $\frac{dy}{dx} = P(x)\cdot Q(y)$. 2. $\frac{dy}{Q(y)} = P(x)dx$. 3. $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C$. 4. $y = \varphi(x) + C$.	$y' = f(x;y) = f\left(1;\frac{y}{x}\right)$ Подстановка $\begin{cases} \frac{y}{x} = u(x), \\ y' = u'x + u \end{cases}$ приводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.	$y' = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ 1. Если $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, то применяем подстановку: $\begin{cases} x = x_1 + k, \\ y = y_1 + h, \\ y' = y_1'. \end{cases}$ 2. Если $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, то применяем подстановку: $\begin{cases} z = ax + by, \\ y' = \frac{z'-a}{b}. \end{cases}$	$y' + P(x)y = Q(x)$ **Метод Бернулли** Подстановка $\begin{cases} y = u(x)v(x), \\ y' = u'v + uv' \end{cases}$ приводит уравнение к решению системы, $\begin{cases} u'v = Q(x), \\ v' + P(x)v = 0, \end{cases}$ из которой находим функции $u(x)$ и $v(x)$ для общего решения $y = uv$.	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$ $y'y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$ Подстановка $\begin{cases} z(x) = y^{1-n}, \\ y^{-n}y' = \frac{z'}{1-n}. \end{cases}$ приводит уравнение к линейному уравнению относительно функции $z(x)$: $\frac{z'}{1-n} + P(x)\cdot z = Q(x)$.	1. $\log_a 1 = 0$, $\ln e = 1$. 2. $\log_a a = 1$, $\log_e a = \ln a$. 3. $\log_a bc = \log_a\lvert b\rvert - \log_a\lvert c\rvert$. 4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a\lvert b\rvert - \log_a\lvert c\rvert$. 5. $\log_a b^n = n\cdot\log_a b$. 6. $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\cdot\log_a b$. **Логарифмическое уравнение** $\ln y = x \Leftrightarrow y = e^x$

Методы интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков

Уравнения, допускающие понижение порядка	Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка (ЛОДУ 2)	Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка (ЛНДУ 2)
$y^{(n)} = f(x)$ Общее решение находится n-кратным интегрированием $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ Подстановка $y^{(k)} = z(x)$ позволяет понизить порядок уравнения на k единиц. $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ Подстановка $y' = p(y)$ позволяет понизить порядок уравнения на одну единицу. $y'' = p'\cdot p$	$y'' + py' + qy = 0$, где $p, q = const$ $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ – характеристическое уравнение	$y'' + py' + qy = f(x)$, где $p, q = const$ **Структура общего решения.** Общее решение есть функция $y(x) = \overline{y} + y^*$, где $\overline{y}$ – решение соответствующего однородного уравнения, y^* – частное решение данного уравнения. Для правой части вида $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\sin\beta x + Q_m(x)\cos\beta x\right)$ частное решение ищется в виде $y^* = x^r e^{\alpha x}\left(M_k(x)\sin\beta x + N_k(x)\cos\beta x\right)$, если числа $\alpha \pm \beta i$ являются корнями характеристического уравнения кратности r . При этом $k = \max(n, m)$.

Корни	Общее решение
$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}$
$\lambda = \alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x)$