

1 По схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено 10%-е обследование предприятий одной из отраслей экономики в отчетном году. Результаты обследования представлены в таблице:

Выпуск продукции, млн. руб.	Менее 30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	Более 90	Итого
Число предприятий	6	9	19	29	21	9	5	2	100

Найти:

- вероятность того, что средний размер выпуска продукции всех предприятий отличается от его среднего размера в выборке не более чем на 5 млн. руб. (по абсолютной величине);
- границы, в которых с вероятностью 0,95 заключена доля предприятий, выпуск продукции которых менее 50 млн. руб.;
- объем выборки, при которой те же границы для доли предприятий (см. п. б), можно гарантировать с вероятностью 0,9876.

Решение.

признак  $X_i$  - выпуск продукции (млн. руб.)

Найдем среднюю арифметическую и дисперсию выпуска продукции используя упрощенный способ расчета. Составим вспомогательную таблицу.

$X_i$	$m_i$	$x_i$	$u_i$	$u_i m_i$	$u_i^2 m_i$	$(u_i + 1)^2 m_i$
< 30	6	25	-3	-18	54	24
30-40	9	35	-2	-18	36	9
40-50	19	45	-1	-19	19	0
50-60	29	55	0	0	0	29
60-70	21	65	1	21	21	84
70-80	9	75	2	18	36	81
80-90	5	85	3	15	45	80
> 90	2	95	4	8	32	50
Итого	100	—	—	7	243	357

Последовательность расчетов:

1. Перейдем к дискретному ряду  $x_i$ :  $x_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2}$

2. Переходим к координатам  $u_i$ :  $u_i = \frac{x_i - c}{k}$ ,  
где  $k=10$  - шаг интервала,  $c=55$  - середина среднего интервала.

$$u_1 = \frac{x_1 - 55}{10} = \frac{25 - 55}{10} = -3, \quad u_2 = -2, \dots$$

3. Вычисляем  $u_i \cdot m_i$ ,  $u_i^2 \cdot m_i$ ,  $(u_i + 1)^2 \cdot m_i$

4. Сделаем проверку правильности расчетов с помощью контрольного столбца.

$$(u_i + 1)^2 \cdot m_i = u_i^2 \cdot m_i + 2u_i \cdot m_i + m_i$$

$$357 = 243 + 2 \cdot 7 + 100$$

$$357 = 357 \text{ (верно).}$$

5. Находим среднюю арифметическую выпуска продукции  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = k \cdot \bar{u} + c = k \cdot \frac{\sum u_i \cdot m_i}{n} + c = 10 \cdot \frac{7}{100} + 55 = 0,7 + 55 = 55,7 \text{ (млн. руб.)}$$

Вывод: средний выпуск продукции предприятий в отчетном году равен 55,7 млн. руб.

6. Находим дисперсию выпуска продукции  $S^2$ :

$$S^2 = k^2 \cdot (\bar{u}^2 - \bar{u}^2) = k^2 \left( \frac{\sum u_i^2 \cdot m_i}{n} - \left( \frac{\sum u_i \cdot m_i}{n} \right)^2 \right) =$$

$$= 10^2 \cdot \left( \frac{243}{100} - \left( \frac{7}{100} \right)^2 \right) = 100 \cdot (2,43 - 0,0049) = 242,51$$

Зная дисперсию найдем среднее квадратическое отклонение  $\sigma$  выпуска продукции предприятий:

$$\sigma = \sqrt{S^2} = \sqrt{242,51} \approx 15,5727 \text{ (млн. руб.)}$$

Вывод: СКО выпуска продукции предприятий в отчетном году равен 15,5727 млн. руб.

- а)  $\bar{x}_r$  - средний размер выпуска продукции всех предприятий;  
 $\bar{x}_b = 55,7$  - средний размер выпуска продукции в выборке;  
 $\Delta = 5$  (млн. руб.)

Искомую вероятность найдем по формуле

$$P(|\bar{x}_r - \bar{x}_b| \leq \Delta) \approx \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_{\bar{x}}'}\right)$$

где  $\sigma_{\bar{x}}' \approx \sqrt{\frac{s^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$ ,  $n = 100$  - объем выборки,  
 $N$  - объем генеральной совокупности.

По условию задачи известно, что проведено 10%-ное обследование предприятий, следовательно,

$$N \cdot 0,1 = 100, \quad N = 1000.$$

Находим СКД  $\sigma_{\bar{x}}' = \sqrt{\frac{s^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{242,51}{100} \left(1 - \frac{100}{1000}\right)} =$   
 $= \sqrt{2,1826} \approx 1,4774$  (млн. руб.).

$$\frac{\Delta}{\sigma_{\bar{x}}'} = \frac{5}{1,4774} = 3,38$$

По таблице значений для функции Лапласа определяем  $\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_{\bar{x}}'}\right) = \Phi(3,38) = 0,9993$

Подставим найденные значения  $\sigma_{\bar{x}}'$  и  $\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_{\bar{x}}'}\right)$  в формулу искомой вероятности, получаем

$$P(|\bar{x}_r - 55,7| \leq 5) \approx 0,9993.$$

Ответ: вероятность того, что средний размер выпуска продукции всех предприятий отличается от его среднего размера в выборке не более чем на 5 млн. руб. приблизительно равна 0,999.

б) По условию заданы известно:

$$P = \Phi(t) = 0,95,$$

Доверительный интервал для доли предприятий найдем по формуле  $w - \Delta \leq p \leq w + \Delta$ ,

$$\text{где } \Delta = t \cdot \sigma'_w.$$

По таблице значений для функции Лапласа определим значение  $t$  соответствующее равенству  $\Phi(t) = 0,95$ .

$$t = 1,96.$$

Находим СКО  $\sigma'_w = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$ , где  $w = \frac{m}{n}$ .

$m$  - число предприятий, выпуск продукции которых менее 50 млн. руб.

$$m = 6 + 9 + 19 = 34, \quad w = \frac{m}{n} = \frac{34}{100} = 0,34.$$

$$\sigma'_w = \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100} \cdot \left(1 - \frac{100}{1000}\right)} = \sqrt{0,0020} = 0,0447.$$

$$\Delta = t \cdot \sigma'_w = 1,96 \cdot 0,0447 = 0,0876$$

Находим границы:

$$0,34 - 0,0876 \leq p \leq 0,34 + 0,0876$$

$$0,2524 \leq p \leq 0,4276$$

$$0,252 \leq p \leq 0,428$$

Ответ: границы, в которых с вероятностью 0,95 заключена доля предприятий, выпуск продукции которых менее 50 млн. руб. составляет от 0,252 до 0,428.

б) По условию задачи известно:

$$\Phi(t) = 0,9876, \quad \Delta = 0,0876 \text{ (см. п. 8)}, \quad w = 0,34.$$

Объем ССБВ  $n' = \frac{n \cdot N}{n + N}$  найдем через объем

$$\text{ССПВ } n = \left(\frac{t}{\Delta}\right)^2 \cdot w \cdot (1-w).$$

Т.к.  $\Phi(t) = 0,9876$ , то  $t = 2,5$ .

$$\text{Тогда } n = \left(\frac{2,5}{0,0876}\right)^2 \cdot 0,34 \cdot (1-0,34) = 182,7657$$

$$n' = \frac{n \cdot N}{n + N} = \frac{182,7657 \cdot 1000}{182,7657 + 1000} = 154,5240 \approx 155 \text{ (предприятий)}.$$

Т.к. вероятность увеличилась от 0,95 до 0,9876, то это привело к увеличению выборки от 100 до 155 предприятий.

Ответ: объем выборки должен быть равен 155 предприятиям.