В среднем по 15% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из десяти договоров с наступлением страхового случая будет связано с выплатой страховой суммы:

а) три договора

б) менее двух договоров

Решение:

а) Соб. A - выплата страховой суммы

$P(A) = p = \frac{15}{100} = 0,15 \qquad q = 1 - p = 1 - 0,15 = 0,85$

$n = 10 \quad m = 3$

$P_{10}(3) = C_{10}^{3} \cdot 0,15^3 \cdot 0,85^7 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot 0,15^3 \cdot 0,85^7 = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7! \cdot 6} \cdot 0,15^3 \cdot 0,85^7 =$

$= 120 \cdot 0,003375 \cdot 0,32057708 = 0,1298$

б) Соб. B - менее 2х выплат страховой суммы

$P(B) = P_{10}(m < 2) = P_{10}(0) + P_{10}(1)$

$P_{10}(0) = C_{10}^{0} \cdot 0,15^0 \cdot 0,85^{10} = 1 \cdot 0,85^{10} = 0,1969$

$P_{10}(1) = C_{10}^{1} \cdot 0,15^1 \cdot 0,85^9 = \frac{10!}{9! \cdot 1!} \cdot 0,15 \cdot 0,85^9 = \frac{9! \cdot 10}{9! \cdot 1} \cdot 0,15 \cdot 0,23161694 = 0,3474$

$P_{10}(m < 2) = 0,1969 + 0,3474 = 0,5443$

Ответ: а) 0,130 б) 0,544

В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектна. Найти вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность:

а) три автомобиля

б) менее трех

Решение:

а) Соб. A - автомобиль окажется некомплектным

По условию задачи известно:

$P(A)=p=\frac{1}{5}=0,2 \quad q=1-p=1-0,2=0,8$

Т.к. соб. A должно произойти 3 раза $(m=3)$ в 10 испытаниях $(n=10)$, то применим формулу Бернулли

$P_{10}(3)=C_{10}^{3}\cdot 0,2^{3}\cdot 0,8^{7}=\frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot 0,2^{3}\cdot 0,8^{7}=\frac{\cancel{7!}\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{\cancel{7!}\cdot 6}\cdot 0,008\cdot 0,2097152=0,2013$

б) Соб B - менее трех автомобилей окажутся некомплектными

$P(B)=P_{10}(m<3)=P_{10}(0)+P_{10}(1)+P_{10}(2)$

$P_{10}(0)=C_{10}^{0}\cdot 0,2^{0}\cdot 0,8^{10}=1\cdot 0,8^{10}=0,1074$

$P_{10}(1)=C_{10}^{1}\cdot 0,2^{1}\cdot 0,8^{9}=\frac{10!}{1!\cdot 9!}\cdot 0,2\cdot 0,8^{9}=\frac{\cancel{9!}\cdot 10}{\cancel{9!}\cdot 1}\cdot 0,2\cdot 0,134217 73=0,2684$

$P_{10}(2)=C_{10}^{2}\cdot 0,2^{2}\cdot 0,8^{8}=\frac{10!}{8!\cdot 2!}\cdot 0,2^{2}\cdot 0,8^{8}=\frac{\cancel{8!}\cdot 9\cdot 10}{\cancel{8!}\cdot 2}\cdot 0,04\cdot 0,16777216=0,302$

$P_{10}(m<3)=0,1074+0,2684+0,302=0,6778$

Ответ: а) 0,201 б) 0,678

Производится залп из шести орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0,6. Найти вероятность ликвидации объекта, если для этого необходимо не менее четырех попаданий.

Решение:

Соб. A - объект ликвидирован

Соб. B - орудие попало в объект

$P(B)=p=0,6 \quad q=1-p=1-0,6=0,4$

$n=6 \quad m\geq 4$

$P(A)=P_6(m\geq 4)=P_6(4)+P_6(5)+P_6(6)$

$P_6(4)=C_6^4\cdot 0,6^4\cdot 0,4^2=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0,6^4\cdot 0,4^2=\frac{\cancel{4!}\cdot 5\cdot 6}{\cancel{4!}\cdot 2}\cdot 0,1296\cdot 0,16=0,311$

$P_6(5)=C_6^5\cdot 0,6^5\cdot 0,4^1=\frac{6!}{5!\cdot 1}\cdot 0,6^5\cdot 0,4^1=\frac{\cancel{5!}\cdot 6}{\cancel{5!}\cdot 1}\cdot 0,7776\cdot 0,4=0,1866$

$P_6(6)=C_6^6\cdot 0,6^6\cdot 0,4^0=0,6^6=0,0467$

$P_6(m\geq 4)=0,311+0,1866+0,0467=0,5443$

Ответ: 0,544

Предполагается, что 10% открывающихся новых малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из шести малых предприятий не более двух в течение года прекратят свою деятельность?

Решение:

Соб. A - предприятие прекратит свою деятельность

$P(A)=p=\frac{10}{100}=0,1 \quad q=1-p=1-0,1=0,9$

$n=6 \quad m\leq 2$

$P_6(m\leq 2)=P_6(0)+P_6(1)+P_6(2)$

$P_6(0)=C_6^0\cdot 0,1^0\cdot 0,9^6=1\cdot 0,9^6=0,5314$

$P_6(1)=C_6^1\cdot 0,1^1\cdot 0,9^5=\frac{6!}{5!\cdot 1}\cdot 0,1\cdot 0,9^5=\frac{\cancel{5!}\cdot 6}{\cancel{5!}\cdot 1}\cdot 0,1\cdot 0,59049=0,3543$

$P_6(2)=C_6^2\cdot 0,1^2\cdot 0,9^4=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0,01\cdot 0,9^4=\frac{\cancel{4!}\cdot 5\cdot 6}{\cancel{4!}\cdot 2}\cdot 0,01\cdot 0,6561=0,0984$

$P_6(m\leq 2)=0,5314+0,3543+0,0984=0,9841$

Ответ: 0,984

В семье десять детей. Считая вероятность рождения мальчика и девочки равными между собой, определить вероятность того, что в данной семье:

а) не менее трех мальчиков

б) не более трех мальчиков

Решение:

а) Соб А. - в семье есть мальчик

$P(A)=p=0,5 \quad q=1-p=1-0,5=0,5$

$n=10 \quad m\geq 3$

$P_{10}(m\geq 3)=P_{10}(3)+P_{10}(4)+P_{10}(5)+P_{10}(6)+P_{10}(7)+P_{10}(8)+P_{10}(9)+P_{10}(10)=$

$1-P_{10}(0)-P_{10}(1)-P_{10}(2)$

$P_{10}(0)=C_{10}^{0}\cdot 0,5^{0}\cdot 0,5^{10}=1\cdot 0,5^{10}=0,00098$

$P_{10}(1)=C_{10}^{1}\cdot 0,5^{1}\cdot 0,5^{9}=\frac{10!}{9!\cdot 1!}\cdot 0,5\cdot 0,5^{9}=\frac{9!\cdot 10}{9!\cdot 1}\cdot 0,5\cdot 0,00195=0,00975$

$P_{10}(2)=C_{10}^{2}\cdot 0,5^{2}\cdot 0,5^{8}=\frac{10!}{8!\cdot 2!}\cdot 0,5^{2}\cdot 0,5^{8}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!\cdot 2}\cdot 0,25\cdot 0,0039=0,0439$

$P_{10}(m\geq 3)=1-0,00098-0,00975-0,0439=0,9454$

б) Соб. В - в семье не более трех мальчиков

$P(B)=P_{10}(m\leq 3)=P_{10}(0)+P_{10}(1)+P_{10}(2)+P_{10}(3)$

$P_{10}(3)=C_{10}^{3}\cdot 0,5^{3}\cdot 0,5^{7}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}\cdot 0,5^{3}\cdot 0,5^{7}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!\cdot 6}\cdot 0,125\cdot 0,0078=0,117$

$P_{10}(m\leq 3)=0,00098+0,00975+0,0439+0,117=0,1716$

Ответ: а) 0,945 б) 0,172

Два равносильных противника играют в шахматы. Что более вероятно: а) выиграть 2 партии из 4 или 3 партии из 6; б) не менее 2 партий из 6 или не менее 3 партий из 6? (Ничья в расчёт не принимается)

Решение:

а) Соб. A - выиграш партии в шахматы

$P(A)=p=0,5 \quad q=1-p=1-0,5=0,5$

Определим вероятности для условия $n=4, m=2$ и $n=6, m=3$

$P_4(2)=C_4^2\cdot 0,5^2\cdot 0,5^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 0,5^2\cdot 0,5^2=\frac{\cancel{2!}\cdot 3\cdot 4}{\cancel{2!}\cdot 2}\cdot 0,25\cdot 0,25=0,375$

$P_6(3)=C_6^3\cdot 0,5^3\cdot 0,5^3=\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot 0,5^3\cdot 0,5^3=\frac{\cancel{3!}\cdot 4\cdot 5\cdot \cancel{6}}{\cancel{3!}\cdot \cancel{6}}\cdot 0,125\cdot 0,125=0,3125$

Т.к. $0,375>0,3125$, то более вероятно выиграть 2 партии из 4, чем 3 партии из 6

б) Соб. B - выиграш не менее двух партий

$n=6 \quad m\geq 2$

$P(B)=P_6(m\geq 2)=P_6(2)+P_6(3)+P_6(4)+P_6(5)+P_6(6)=1-(P_6(0)+P_6(1))$

$P_6(0)=C_6^0\cdot 0,5^0\cdot 0,5^6=1\cdot 0,5^6=0,0156$

$P_6(1)=C_6^1\cdot 0,5^1\cdot 0,5^5=\frac{6!}{5!\cdot 1!}\cdot 0,5\cdot 0,5^5=\frac{\cancel{5!}\cdot 6}{\cancel{5!}\cdot 1}\cdot 0,5\cdot 0,03125=0,09371$

$P_6(m\geq 2)=1-(0,0156+0,09371)=0,8907$

Соб. C - выиграш не менее трех партий из 6

$n=6 \quad m\geq 3$

$P(C)=P_6(m\geq 3)=P_6(3)+P_6(4)+P_6(5)+P_6(6)=1-P_6(0)-P_6(1)-P_6(2)$

$P_6(2)=C_6^2\cdot 0,5^2\cdot 0,5^4=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0,5^2\cdot 0,5^4=\frac{\cancel{4!}\cdot 5\cdot 6}{\cancel{4!}\cdot 2}\cdot 0,25\cdot 0,0625=0,234$

$P_6(m\geq 3)=1-0,0156-0,0937-0,2344=0,6563$

Т.к. $0,8907>0,6563$, то более вероятно выиграть не менее 2 партий из 6, чем не менее 3 партий из 6.

Ответ: а) более вероятно выиграть 2 партии из 4, чем 3 партии из 6
б) более вероятно выиграть не менее 2 партий из 6, чем не менее 3 партий из 6.

Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени t равна 0,002. Найти вероятность того, что за время t откажут ровно 3 элемента.

Решение.

Соб. A – один элемент перестал работать.

По условию $n = 1000$, $m = 3$, $p = P(A) = 0{,}002$.

Проверим условие применимости формулы Пуассона

$\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}002 = 2 < 10 \Rightarrow$ можно воспользоваться формулой Пуассона, $P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$

$$P_{1000}(3) = \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} = 0{,}1805$$

Ответ: 0,181

В вузе обучаются 3650 студентов. Вероятность того, что день рождения студента приходится на определённый день года равна 1/365. Найти: а) наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 мая, и вероятность такого события;

б) вероятность того, что по крайней мере 3 студента имеют один и тот же день рождения

Решение:

а) Соб. A - студент родился 1 мая

$P(A) = p = \frac{1}{365}$ $n = 3650$

$m = \lambda = n \cdot p = 3650 \cdot \frac{1}{365} = 10$ - наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 мая

$\lambda = 10 = 10$ - условие применимости формулы Пуассона выполняется

$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$ $P_{3650}(10) \approx \frac{10^{10}}{10!} \cdot e^{10} \approx 0{,}1251$

б) Соб. B - по крайней мере 3 студента имеют один день рождения

$P(B) = p = \frac{1}{365}$ $n = 3650$

$\lambda = n \cdot p = 3650 \cdot \frac{1}{365} = 10 = 10$ - условие применимости формулы Пуассона выполняется

$P_{3650}(m \geq 3) = 1 - P_{3650}(m < 3) = 1 - (P_{3650}(0) + P_{3650}(1) + P_{3650}(2))$

$P_{3650}(0) \approx \frac{10^0}{0!} \cdot e^{-10} = 0{,}0001$ $P_{3650}(1) \approx \frac{10!}{1!} \cdot e^{-10} = 0{,}0005$

$P_{3650}(2) \approx \frac{10^2}{2!} \cdot e^{-10} = 0{,}0023$

$P_{3650}(m \geq 3) = 1 - (0{,}0001 + 0{,}0005 + 0{,}0023) = 0{,}9971$

Ответ: а) 10; 0,125 б) 0,997

Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что

а) тираж содержит 5 бракованных книг

б) по крайней мере 9998 книг сброшюрованы правильно

Решение:

а) Соб. A - учебник сброшюрован не правильно

$P(A) = p = 0{,}0001 \quad n = 10000 \quad m = 5$

$\lambda = 0{,}0001 \cdot 10000 = 1 < 10$ - условие применимости формулы Пуассона выполняется

$P_{10000}(5) \approx \frac{1^5}{5!} \cdot e^{-1} = 0{,}0031$

б) Соб. B - по крайней мере 9998 книг сброшюрованы правильно

$m \geq 9998$

$P(B) = p = 1 - 0{,}0001 = 0{,}9999 \qquad P(B) = p = 1 - q$

$n = 10000$

Соб. C - учебник сброшюрован не правильно

$P(C) = p = 0{,}0001 \qquad n = 10000 \qquad m \leq 2$

$\underset{\text{при } p=0{,}9999}{P_{10000}(m \geq 9998)} = 1 - \underset{\text{при } p=0{,}0001}{P_{10000}(m \leq 2)}$

$P_{10000}(m \leq 2) = P_{10000}(0) + P_{10000}(1) + P_{10000}(2)$

$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} \qquad P_{10000}(0) = \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} = 0{,}3679$

$P_{10000}(1) = \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} = 0{,}3679 \qquad P_{10000}(2) = \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} = 0{,}1839$

$P_{10000}(m \leq 2) = 0{,}3679 + 0{,}3679 + 0{,}1839 = 0{,}9197$

Ответ: а) 0,0031 б) 0,92

Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

Решение.

Соб. A – родился мальчик.

По условию $n = 100$, $m = 50$, $p = P(A) = 0,515$, $q = 0,485$.

Проверим условие применимости локальной формулы Муавра-Лапласа.

$npq = 100 \cdot 0,515 \cdot 0,485 = 24,9775 > 20 \Rightarrow$ условие выполнено.

Найдем аргумент функции Гаусса.

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 51,5}{\sqrt{24,9775}} = -\frac{1,5}{4,9977} = -0,30$$

По таблице для функции Гаусса находим $f(-0,30) = 0,3814$.

По формуле Муавра-Лапласа $P_n(m) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}$ находим искомую вероятность, получаем

$$P_{100}(50) \approx \frac{0,3814}{4,9977} = 0,0763$$

Ответ: 0,076

Известно, что в среднем 60% всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов является продукцией первого сорта. Чему равна вероятность того, что в изготовленной партии окажется 120 аппаратов первого сорта, если партия содержит 200 аппаратов?

Решение:

Соб. A - аппарат будет первого сорта

$n=200 \qquad m=120 \qquad P(A)=p=0{,}6 \qquad q=1-p=0{,}4$

$npq=200\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=48>20$ - условие применимости формулы Муавра-Лапласа выполняется

$P_n(m)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{npq}} \qquad x=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{120-120}{\sqrt{48}}=0$

По таблице значений находим $f(x)$ при $x=0$:

$f(0)=0{,}3989 \qquad P_{200}(120)=\dfrac{0{,}3989}{\sqrt{48}}=0{,}0576$

Ответ: 0,058

Аудиторная работа по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 50% студентов. Найти вероятность того, что из 400 студентов работу успешно выполняют:

а) 180 студентов

б) не менее 180 студентов

Решение:

а) Соб. A - студент выполнит работу успешно

$P(A) = p = \frac{50}{100} = 0,5 \quad q = 1-p = 1-0,5 = 0,5$

$n = 400 \qquad m = 180$

$npq = 400 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 100 > 20$ - условие применимости формулы Муавра - Лапласа выполняется

$P_n(m) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}} \qquad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{180-200}{\sqrt{100}} = -2$

По таблице значений находим $f(x)$ при $x = -2$:

$f(-2) = 0,0540 \qquad P_{400}(180) = \frac{0,0540}{\sqrt{100}} = 0,0054$

б) Соб. B - не менее 180 студентов выполнит успешно работу

Применим к решению задачи интегральную формулу Муавра - Лапласа

По условию известно:

$a = 180 \qquad b = 400$

$x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}} = \frac{180-200}{\sqrt{100}} = -2 \qquad x_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}} = \frac{400-200}{\sqrt{100}} = 20$

$P(B) = P_{400}(180 \le m \le 400) \approx \frac{1}{2}[\Phi(20) - \Phi(-2)] = \frac{1}{2}[\Phi(20) + \Phi(2)] =$

$\frac{1}{2}(1 + 0,9545) = 0,9772$

Ответ: а) 0,005 б) 0,977

При обследовании уставных фондов банков установлено, что пятая часть банков имеют уставной фонд свыше 100 млн.руб. Найти вероятность того, что среди 1800 банков имеют уставной фонд свыше 100 млн.руб.:

а) не менее 300

б) от 300 до 400 включительно

Решение:

а) Соб. A - банк имеет уставной фонд свыше 100 млн.руб.

$P(A)=p=\frac{1}{5}=0,2 \quad q=1-p=1-0,2=0,8$

$n=1800 \quad a=300 \quad b=1800$

Воспользуемся интегральной формулой Муавра-Лапласа

$npq=1800\cdot 0,2\cdot 0,8=288>20$ - условие применимости формулы Муавра-Лапласа выполняется

$x_1=\frac{a-np}{\sqrt{npq}}=\frac{300-360}{\sqrt{288}}=-3,5355$

$x_2=\frac{b-np}{\sqrt{npq}}=\frac{1800-360}{\sqrt{288}}=84,8526$

$P_{1800}(300\le m\le 1800)\approx\frac{1}{2}[\Phi(84,8526)-\Phi(-3,53)]=\frac{1}{2}[\Phi(84,8526)+$

$+\Phi(3,53)]\approx\frac{1}{2}(1+0,9996)=0,9998$

б) Соб. B - от 300 до 400 банков имеют уставной фонд свыше 100 млн.руб.

$a=300 \quad b=400$

$x_1=\frac{a-np}{\sqrt{npq}}=\frac{300-360}{\sqrt{288}}=-3,54 \quad x_2=\frac{b-np}{\sqrt{npq}}=\frac{400-360}{\sqrt{288}}=2,36$

$P(B)=P_{1800}(300\le m\le 400)\approx\frac{1}{2}[\Phi(2,36)-\Phi(3,54)]=\frac{1}{2}[\Phi(2,36)+\Phi(3,54)]\approx$

$=\frac{1}{2}(0,9817+0,9996)=0,9906$

Ответ: а) 0,9998 б) 0,9906