

Опорный конспект по теме: «Математическая логика»

Таблица 1 – Описание логических операций

Название логической операции	Прочтение	Обозначение	Определение операции	Таблица истинности															
<b>Отрицание</b>	не	-	Отрицание высказывания $X$ это высказывание $\bar{X}$ , которое истинно, когда $X$ – ложно, и ложно, когда $X$ – истинно.	<table border="1"> <tr><td><math>X</math></td><td><math>\bar{X}</math></td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	$X$	$\bar{X}$	0	1	1	0									
$X$	$\bar{X}$																		
0	1																		
1	0																		
<b>Конъюнкция</b> (логическое умножение)	и	$\wedge$	Конъюнкция высказываний $X$ и $Y$ это высказывание $X \wedge Y$ , которое истинно тогда и только тогда, когда $X$ и $Y$ оба истинны.	<table border="1"> <tr><td><math>X</math></td><td><math>Y</math></td><td><math>X \wedge Y</math></td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	$X$	$Y$	$X \wedge Y$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
$X$	$Y$	$X \wedge Y$																	
0	0	0																	
0	1	0																	
1	0	0																	
1	1	1																	
<b>Дизъюнкция</b> (логическое сложение)	или	$\vee$	Дизъюнкция высказываний $X$ и $Y$ это высказывание $X \vee Y$ , которое истинно когда хотя бы одно из них истинно.	<table border="1"> <tr><td><math>X</math></td><td><math>Y</math></td><td><math>X \vee Y</math></td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	$X$	$Y$	$X \vee Y$	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
$X$	$Y$	$X \vee Y$																	
0	0	0																	
0	1	1																	
1	0	1																	
1	1	1																	
<b>Импликация</b> (логическое следование)	если..., то	$\rightarrow$	Импликация высказываний $X$ и $Y$ это высказывание $X \rightarrow Y$ , которое ложно тогда и только тогда, когда $X$ истинно, а $Y$ ложно.	<table border="1"> <tr><td><math>X</math></td><td><math>Y</math></td><td><math>X \rightarrow Y</math></td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	$X$	$Y$	$X \rightarrow Y$	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
$X$	$Y$	$X \rightarrow Y$																	
0	0	1																	
0	1	1																	
1	0	0																	
1	1	1																	
<b>Эквивалентность</b> (тождественность)	тогда и только тогда, когда	$\leftrightarrow$	Эквивалентностью высказываний $X$ и $Y$ это высказывание $X \leftrightarrow Y$ , которое истинно тогда и только тогда, когда $X$ и $Y$ оба истинны или ложны.	<table border="1"> <tr><td><math>X</math></td><td><math>Y</math></td><td><math>X \leftrightarrow Y</math></td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	$X$	$Y$	$X \leftrightarrow Y$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
$X$	$Y$	$X \leftrightarrow Y$																	
0	0	1																	
0	1	0																	
1	0	0																	
1	1	1																	
<b>Штрих Шеффера</b> (антиконъюнкция)	Неверно, что... и...		$X   Y = \overline{X \wedge Y}$	<table border="1"> <tr><td><math>X</math></td><td><math>Y</math></td><td><math>X   Y</math></td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	$X$	$Y$	$X   Y$	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
$X$	$Y$	$X   Y$																	
0	0	1																	
0	1	1																	
1	0	1																	
1	1	0																	
<b>Стрелка Пирса</b> (антидизъюнкция)	Ни..., ни...	$\downarrow$	$X \downarrow Y = \overline{X \vee Y}$	<table border="1"> <tr><td><math>X</math></td><td><math>Y</math></td><td><math>X \downarrow Y</math></td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	$X$	$Y$	$X \downarrow Y$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
$X$	$Y$	$X \downarrow Y$																	
0	0	1																	
0	1	0																	
1	0	0																	
1	1	0																	
<b>Сумма по модулю два</b> (антиэквивалентность)	...плюс...	$\oplus$	$X \oplus Y = \overline{X \leftrightarrow Y}$	<table border="1"> <tr><td><math>X</math></td><td><math>Y</math></td><td><math>X \oplus Y</math></td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	$X$	$Y$	$X \oplus Y$	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
$X$	$Y$	$X \oplus Y$																	
0	0	0																	
0	1	1																	
1	0	1																	
1	1	0																	

Таблица 2 – Основные законы, определяющие свойства логических операций

№	Название закона	Логико-математическая запись
1	Идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции	$X \vee X \leftrightarrow X, X \wedge X \leftrightarrow X$
2	Коммутативность дизъюнкции и конъюнкции	$X \vee Y \leftrightarrow Y \vee X, X \wedge Y \leftrightarrow Y \wedge X$
3	Ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции	$X \vee (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \vee Z,$ $X \wedge (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \wedge Z$
4	Дистрибутивность дизъюнкции и конъюнкции относительно друг друга	$X \vee (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z),$ $X \wedge (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$
5	Двойное отрицание	$\overline{\overline{X}} \leftrightarrow X$
6	Закон де Моргана	$\overline{X \vee Y} \leftrightarrow \overline{X} \wedge \overline{Y}, \overline{X \wedge Y} \leftrightarrow \overline{X} \vee \overline{Y}$
7	Склеивание	$(X \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}) \leftrightarrow X,$ $(X \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Y}) \leftrightarrow X$
8	Поглощение	$X \vee (X \wedge Y) \leftrightarrow X, X \wedge (X \vee Y) \leftrightarrow X$
9	Законы нуля и единицы	$X \vee 0 \leftrightarrow X, X \wedge 0 \leftrightarrow 0, X \vee 1 \leftrightarrow 1,$ $X \wedge 1 \leftrightarrow X, X \wedge \overline{X} \leftrightarrow 0$
10	Закон исключения третьего	$X \vee \overline{X} \leftrightarrow 1$
11	Тождество	$X \leftrightarrow X$ или $X = X$
12	Противоречие и отрицание противоречия	$\overline{X} \wedge X \leftrightarrow 0, \overline{\overline{X} \wedge X} \leftrightarrow 1$
13	Контрапозиция	$(X \rightarrow Y) \leftrightarrow (\overline{Y} \rightarrow \overline{X})$
14	Цепное заключение (силлогизм)	$((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z)) \rightarrow (X \rightarrow Z) \leftrightarrow 1$
15	Противоположность	$(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (\overline{X} \leftrightarrow \overline{Y})$
16	Модус поненс (modus ponens) (правило заключение)	$((X \wedge (X \rightarrow Y)) \rightarrow Y) \leftrightarrow 1$

**Алгоритм построения**

дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм алгебры высказываний

1. Выразить все логические операции через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание:

$$x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2, x_1 \leftrightarrow x_2 = (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}), x_1 \leftrightarrow x_2 = (x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}).$$

2. Применить законы де Моргана и двойного отрицания