МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«ВСЕРОССИЙСКИЙ ЗАОЧНЫЙ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов второго курса,
обучающихся по направлению 080500.62
«Бизнес-информатика»

Квалификация (степень) бакалавр

Под редакцией профессора Н.Ш. Кремера

Факультет менеджмента и маркетинга
Кафедра высшей математики

Москва 2012

ББК 22.3

Учебно-методическое пособие подготовили:
содержание дисциплины, методические указания,
введение, темы 1–3 – профессор ***Н.Ш. Кремер***,
тема 4 – доцент ***И.М. Эйсымонт***,
тема 5 – доцент ***А.В. Потемкин***,
варианты контрольной работы – профессор ***Н.Ш. Кремер***,
доцент ***И.М. Эйсымонт,*** доцент ***А.В. Потемкин***,
ст. преподаватель ***Н.И. Федорова***

Учебно-методическое пособие обсуждено
на заседании кафедры высшей математики
Зав. кафедрой профессор ***Н.Ш. Кремер***

Учебно-методическое издание одобрено
на заседании Учебно-методического совета ВЗФЭИ

И.о. проректора, председатель УМС ***В.П. Белгородцев***

Дискретная математика. Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов второго курса, обучающихся по направлению 080500.62 «Бизнес-информатика», квалификация (степень) бакалавр / под ред. профессора Н.Ш. Кремера. – М.: ВЗФЭИ, 2012.

В учебно-методическом пособии приведен обзор основных понятий и положений дисциплины «Дискретная математика», даны методические рекомендации по их изучению, выделены типовые задачи с решениями, представлены контрольные вопросы для самопроверки и задачи для самоподготовки, приведены варианты контрольной работы, а также методические указания по ее выполнению.

ББК 22.3

Введение

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования (ФГОС-3) студенты второго курса, обучающиеся по направлению 080500.62 «Бизнес-информатика», квалификация (степень) бакалавр, изучают дисциплину «Дискретная математика».

Дискретная математика – одна из важнейших составляющих современной математики. В отличие от других математических дисциплин учебного плана направления «Бизнес-информатика», таких как «Математический анализ», «Линейная алгебра» и др., дискретная математика имеет дело с объектами нечисловой природы, что позволяет использовать ее методы для моделирования социальных и экономических процессов. Понятия и методы дискретной математики необходимы для постановки различных прикладных задач, усвоения и разработки современных информационных технологий, которые лежат в основе теории и практики программирования.

Целью изучения дисциплины «Дискретная математика» является освоение математического аппарата, позволяющего анализировать, моделировать и решать прикладные, в том числе экономические, задачи.

Задачи изучения дисциплины вытекают из требований к результатам освоения и условиям реализации основной образовательной программы и компетенций, установленных ФГОС-3 по направлению 080500.62 «Бизнес-информатика», и включают:

• освоение методов дискретной математики для решения прикладных задач;

• формирование навыков моделирования реальных объектов и процессов с использованием математического аппарата дискретной математики;

• развитие логического и алгоритмического мышления студентов, повышение уровня их математической культуры;

• развитие навыков самостоятельного изучения учебной и научной литературы.

Знания, полученные студентами в процессе изучения дисциплины «Дискретная математика», необходимы для усвоения дисциплин математического и естественно-научного цикла («Теория вероятностей и математическая статистика», «Исследование операций», «Теоретические основы информатики», «Анализ данных», «Общая теория систем»), а также ряда дисциплин профессионального цикла («Программирование», «Вычислительные системы и сети» и др.).

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих общекультурных и профессиональных компетенций, которыми в соответствии с требованиями ФГОС-3 должен обладать бакалавр бизнес-информатики:

• владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу и восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-1);

• способность логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь (ОК-6);

• способность к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства (ОК-9);

• способность к организованному подходу к освоению и приобретению новых навыков и компетенций (ОК-17);

• способность проводить анализ инноваций в экономике, управлении и ИКТ (ПК-4);

• навыки использования основных методов естественно-научных дисциплин для теоретического и экспериментального исследования (ПК-19);

• навыки использования соответствующего математического аппарата и инструментальных средств для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования (ПК-20);

• навыки подготовки научно-технических отчетов, презентаций и научных публикаций по результатам выполненных исследований (ПК-21).

В результате изучения дисциплины студент должен:

а) **знать**:

• основные понятия теории множеств, комбинаторики, математической логики, теории графов и теории алгоритмов, используемых в экономических исследованиях, при разработке новых информационных технологий, а также при изучении других дисциплин математического, естественно-научного и профессионального циклов;

б) **уметь:**

• применять методы дискретной математики для решения прикладных задач;

• строить математические модели прикладных задач;

в) **владеть:**

• навыками решения задач дискретной математики.

1. Содержание дисциплины и методические рекомендации по ее изучению

Ниже по каждой теме приводится учебно-программный материал[1], который должен изучить студент, со ссылками на рекомендованные учебники и учебные пособия.

Контрольные вопросы по каждой теме представлены в разделе 2 «Вопросы для самопроверки».

Рекомендуемые по каждой теме задачи с решениями и для самостоятельной работы приведены в разделе 3 «Задачи для самоподготовки».

Указания по выполнению контрольных работ с частичным использованием КОПР рассмотрены в брошюре «Математика. Методические указания по проведению и выполнению контрольных работ с использованием КОПР» [Электронные ресурсы, 3].

[1] Учитывая, что учебный материал дисциплины недостаточно отражен в доступных для студента-заочника пособиях, содержание отдельных тем дается более подробно, чем это принято в методических указаниях.

Тема 1. Множества, функции, отношения

Множества – основные понятия. Диаграммы Венна. Операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение. Кортежи и прямое (декартово) произведение множеств. Соответствия и их свойства. Взаимно однозначные соответствия. Мощности бесконечных множеств. Принципы включений-выключений. Понятие функции. Обратные функции. Суперпозиции и формулы. Способы задания функций. Общее понятие отношения. Бинарные отношения и их свойства (рефлексивность, симметричность, транзитивность). Отношение эквивалентности и классы эквивалентности. Отношение порядка. Линейный порядок и частичный порядок ([1, часть 2, кроме § 5, 6], [2, § 5.1, 13.3]).

Понятие множества относится к числу первичных. Под *множеством* понимают некоторую совокупность элементов, объединенных какими-либо признаками. С множествами и их графическим изображением на диаграммах Венна студенты встречались ранее в курсах математического анализа и теории вероятностей. Там же рассматривались понятия *подмножества* B (части данного множества A: $B \subset A$), *пустого множества* $\varnothing$ (не содержащего ни одного элемента), *дополнения* $\overline{A}$ множества A (состоящего из всех элементов некоторого универсального множества[1] U, не входящих в множество A). Определялись основные операции над множествами A и B: *объединение* $A \cup B$ (множество, состоящее из всех элементов множества A и B), *пересечение* $A \cap B$ (множество, состоящее из всех общих элементов A и B), *разность* $A \setminus B$ (множество, состоящее из всех элементов множества A, не входящих в множество B).

В данном курсе вводится понятие *прямого*, или *декартова*, произведения множеств A и B, т.е. множество $A \times B$, элементы которого представляют собой всевозможные упорядоченные пары элементов множеств A и B (например, декартово произведение координатных осей Ox и Oy есть плоскость Oxy).

[1] Под *универсальным множеством* здесь понимается множество, включающее все множества, участвующие в рассматриваемой задаче.

Множество называется *конечным*, если содержит конечное число элементов, и *бесконечным* в противном случае.

Если между множествами A и B имеет место взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому элементу $a \in A$ соответствует определенный элемент $b \in B$ ($a \to b$), и наоборот ($b \to a$), то говорят, что множества A и B имеют одинаковую *мощность*, или *эквивалентны*: $A \sim B$. Для конечных множеств это означает, что они имеют одинаковое число элементов. В случае бесконечного множества мощность представляет собой обобщение понятия «число элементов». В этом смысле счетные[1] множества являются «самыми маленькими» из бесконечных множеств.

▷ **Пример 1.** Даны множества чисел $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$ и универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Найти множества чисел: $D = (B \cap C) \cup \left(\overline{C} \setminus (A \cap B)\right)$, $E = \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(B \cap (C \setminus A)\right)$. Являются ли множества E и D равными; эквивалентными; включаемыми одно в другое ($D \subset E$ или $E \subset D$); пересекающимися, но не включаемыми одно в другое; непересекающимися ($D \cap E = \varnothing$)?

Р е ш е н и е. Для нахождения множества D вначале найдем: пересечения множеств $B \cap C = \{5, 7\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$, дополнение множества C (до множества U) $\overline{C} = \{1, 4, 6, 8\}$, разность множеств $C \setminus (A \cap B) = \{1, 6, 8\}$. Теперь $D = \{5, 7\} \cup \{1, 6, 8\} = \{1, 5, 6, 7, 8\}$.

Для нахождения множества E вначале найдем: $\overline{B} = \{1, 2, 3, 8\}$, $\overline{B} \cap \overline{C} = \{1, 2, 3, 8\} \cap \{1, 4, 6, 8\} = \{1, 8\}$, $C \setminus A = \{3, 7\}$, $B \cap (C \setminus A) =$ $= \{4, 5, 6, 7\} \cap \{3, 7\} = \{7\}$. Теперь $E = \{1, 8\} \cup \{7\} = \{1, 7, 8\}$. Множества D и E не являются равными, так как не состоят из одинаковых эле-

[1] Множество называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел (его элементы можно перенумеровать).

ментов, и эквивалентными, так как имеют разные мощности (число элементов), при этом множество E включается в множество D ($E \subset D$). ▶

Бинарным (*двухместным*) *отношением* множеств A и B называется любое подмножество R декартова множества $A \times B$, т.е. $R \subset A \times B$. Это означает, что если элементы x и y связаны бинарным отношением R (записываемым в виде xRy), то пара (x, y) является элементом R, или $xRy \leftrightarrow (x, y) \in R$.

Среди свойств бинарных отношений выделяют рефлексивность, симметричность, транзитивность ([1, часть 2, § 10], [2, § 13.3]). Бинарное отношение, для которого выполнены три указанных свойства, называется *отношением эквивалентности* и является обобщением понятия равенства. Подмножества элементов, эквивалентные данному, называются его *классом эквивалентности*. Если бинарное отношение R на множестве X рефлексивно, транзитивно и антисимметрично, то оно называется *отношением порядка* (*отношением частичного порядка*). Отношение частичного порядка называется *линейным порядком*, если для любых значений x и y имеет место либо xRy, либо yRx.

Соответствие f, сопоставляющее каждому элементу x множества X один и только один элемент y множества Y, называется *отображением* множества X на множество Y.

Функцией называется бинарное отношение f, если из $(x, y) \in f$ и $(x, z) \in f$ следует, что $y = z$. Если область определения и область значений функции соответственно X и Y, то говорят, что функция f отображает множество X на множество Y, т.е. f: $X \to Y$. Это означает, что для любого элемента $x \in X$ существует единственный элемент $y \in Y$, такой, что $(x, y) \in f$.

Подробнее о функциях говорилось в курсе «Математический анализ».

Важное значение в теории множеств имеет *формула включений-выключений* (*принцип включений-выключений*), позволяющая определить мощность объединения конечного числа конечных множеств.

В простейших случаях (для двух или трех множеств) эта формула имеет вид:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|, \quad \textbf{(1)}$$

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|. \quad \textbf{(2)}$$

▷ **Пример 2**. Из 250 абитуриентов экономического вуза, сдававших вступительные экзамены, отметку «3» получили: по математике – 86 чел., русскому языку – 71, обществознанию – 50, математике или русскому языку – 130, математике или обществознанию – 112, русскому языку или обществознанию – 94, по всем трем предметам – 18 чел.

Сколько абитуриентов сдали вступительные экзамены: а) без троек; б) с одной тройкой по математике; в) с одной тройкой.

Р е ш е н и е. а) Пусть $|A|$, $|B|$, $|C|$ – число абитуриентов, получивших отметку «3» соответственно по математике, русскому языку и обществознанию. По условию $|A|=86$, $|B|=71$, $|C|=50$, $|A\cup B|=130$, $|A\cup C|=112$, $|B\cup C|=94$, $|A\cap B\cap C|=18$.

Вначале найдем число абитуриентов, получивших оценку «3» по математике и русскому языку, т.е. $|A\cap B|$.

Из формулы **(1)** $|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=86+71-130=27$.

Аналогично $|A\cap C|=86+50-112=24$, $|B\cap C|=71+50-94=27$.

Теперь найдем число абитуриентов, получивших оценку «3» хотя бы по одному из трех предметов, т.е. $|A\cup B\cup C|$. По формуле **(2)** $|A\cup B\cup C|=86+71+50-27-24-27+18=147$. Следовательно, число абитуриентов, сдавших вступительные экзамены без троек, равно 250 – 147 = 103 чел.

б) Вначале найдем число абитуриентов, имеющих только две тройки – по математике и русскому языку: $|A\cap B|-|A\cap B\cap C|=27-18=9$, по математике и обществознанию: $|A\cap C|-|A\cap B\cap C|=24-18=6$.

Следовательно, только одну тройку по математике имеют 86 – 9 – 6– –18 = 53 чел.

в) Аналогично найдем число абитуриентов, имеющих только одну тройку по русскому языку: (71 – (27 – 18) – (27 – 18) –18 = = 35 чел.) и обществознанию (50 – (24 – 18) – (27 – 18) – 18 = = 17 чел.). Всего абитуриентов, имеющих только одну тройку, равно 53 + 35 + 17 = 105 чел. Решение задачи легко иллюстрируется на диаграмме Венна (рис. 1). ▶

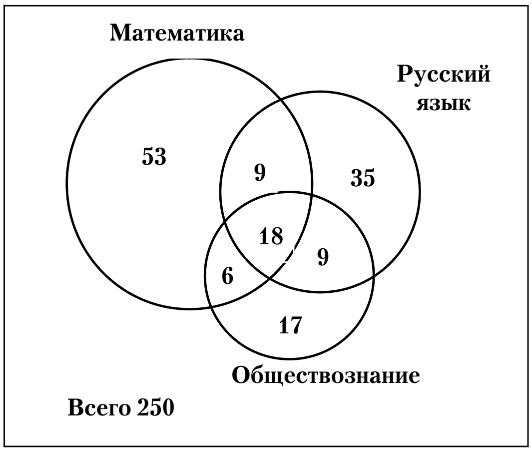


Рис. 1

Тема 2. Комбинаторика

Предмет комбинаторики. Правило суммы и правило произведения. Размещения, перестановки, сочетания без повторений и с повторениями. Биномиальные коэффициенты и соотношения для них. Задачи перечисления. Подсчет числа функций с конечными областями определения ([1, часть 3], [2, § 1.5]).

Комбинаторика – раздел математики, изучающий методы решения задач, связанных с выбором и расположением частей конечного множества, в частности комбинаторных задач на подсчет числа различных комбинаций.

Студенты должны четко знать правила комбинаторики:

• *правило суммы*: если объект A_1 может быть выбран n_1 способами, A_2 – другими n_2 способами, то выбор одного из объектов A_1 или A_2 может быть осуществлен $n_1 + n_2$ способами;

• *правило произведения*: если объект A_1 может быть выбран n_1 способами, а после каждого такого выбора объект A_2 может быть выбран n_2 способами, то выбор всех объектов A_1, A_2 в указанном порядке может быть осуществлен n_1n_2 способами.

Из множества n различных элементов могут быть образованы подмножества (комбинации) из m элементов ($0 \le m \le n$).

Если комбинации из n элементов по m отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения (либо и тем и другим), то их называют *размещениями*. Число размещений из n элементов по m находят по формуле:

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}_{m \text{ сомножителей}} \text{ или } A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Если комбинации из n элементов по m отличаются только составом элементов, то их называют *сочетаниями*. Число сочетаний из n элементов по m находят по формуле:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} \text{ или } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Свойства числа сочетаний:

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \text{ (ибо } 0! = 1\text{)}, \; C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Если комбинации из n элементов отличаются только порядком элементов, то их называют *перестановками*. Число перестановок из n элементов находят по формуле:

$$P_n = n!.$$

▷ **Пример 3.** В первом туре конкурса участвует 16 человек.

Сколько существует различных исходов этого тура, при которых совпадают участники, занявшие 1, 2 и 3-е призовые места, а также два участника, занявшие 15-е и 16-е места и выбывающие из дальнейшего участия в конкурсе?

Р е ш е н и е. Способы распределения участников, занявших 1, 2 и 3-е места (из 16), отличаются как составом участников, так и их порядком; их число – число размещений A_{16}^3. Из оставшихся 13 участников $(16 - 3 = 13)$ два выбывают из конкурса (порядок этих участников значения не имеет); их число – число сочетаний C_{13}^2. По правилу произведения (см. с. 11) получаем, что число различных исходов первого тура конкурса, удовлетворяющих условию задачи, есть

$$A_{16}^3 \cdot C_{13}^2 = (16 \cdot 15 \cdot 14) \cdot \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 262\ 080,$$

или

$$A_{16}^3 \cdot C_{13}^2 = \frac{16!}{13!} \cdot \frac{13!}{2!11!} = \frac{16!}{2!11!} = \frac{11!\ \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{2!11!} = 262\ 080.$$

Другой способ решения состоит в том, что общее число различных исходов первого тура с 16 участниками (без учета распределения тех или иных мест) равно числу перестановок P_{16}. Перестановки участников, занявших места с 4-го по 14-е (т.е. 11 мест), а также 15-е и 16-е места (2 места) приводят к совпадающему в соответствии с условием исходу первого тура; их число (по правилу произведения) равно $P_{11} \cdot P_2$. Значит, число различных исходов первого тура конкурса, удовлетворяющих условию, есть

$$\frac{P_{16}}{P_{11} \cdot P_2} = \frac{16!}{2!11!} == 262\ 080\ . ▶$$

Если в комбинациях из n элементов часть элементов (или все) являются одинаковыми, то их называют *комбинациями* (размещениями, сочетаниями, перестановками) *с повторениями*.

Соответствующие формулы комбинаций с повторениями приведены в пособии ([1, часть 3], [2, § 1.5]). Там же рассмотрены задачи на подсчет различных комбинаций [1, первое практическое занятие], [2, примеры 1.11–1.15].

Тема 3. Математическая логика

Основные понятия логики: высказывания и рассуждения. Основные логические операции и их свойства. Алгебра высказываний. Поня-

тие о булевой алгебре; алгебра высказываний как интерпретация булевой алгебры. Логические функции и способы их задания – таблицы и формулы. Дизъюнктивные и конъюнктивные формы. Теорема о функциональной полноте. Исчисление высказываний. Понятие об алфавите, формулах, аксиомах, правилах вывода и основных теоремах исчисления высказываний. Логика предикатов. Предметная область и предметные переменные. Кванторы общности и существования. Свободные и связанные переменные. Эквивалентные соотношения в логике предикатов. Общезначимые и противоречивые формулы. Запись утверждений естественного языка в логике предикатов. Понятие об исчислении предикатов ([1, часть 1, кроме § 11; часть 2], [2, § 13.1–13.3]).

При изучении темы следует усвоить основные понятия *алгебры логики*: *высказывание* (предположение, которое может быть истинно или ложно, при этом логическая переменная x равна соответственно 1 или 0), *логические операции* (*логические связки*), с помощью которых строятся новые высказывания, образующие *формулы* алгебры логики (алгебры высказываний), *таблицы истинности* таких высказываний.

Надо четко усвоить основные логические операции:

• *отрицание* высказывания X (высказывание $\bar{X}$, которое истинно, когда X ложно, и ложно, когда X истинно);

• *конъюнкция* (*дизъюнкция*) двух высказываний X и Y (высказывание $X \wedge Y$ ($X \vee Y$), которое истинно (ложно) тогда и только тогда, когда X и Y истинны (ложны));

• *импликация* (*эквивалентность*) двух высказываний X и Y (высказывание $X \to Y$ ($X \leftrightarrow Y$), которое ложно (истинно) тогда и только тогда, когда X истинно, а Y ложно (X и Y оба истинны или оба ложны)).

В табл. 1 и 2 приводятся таблицы истинности этих высказываний.

Таблица 1

X	Отрицание $\bar{X}$
0	1
1	0

Таблица 2

X	Y	Конъюнкция $X \wedge Y$	Дизъюнкция $X \vee Y$	Импликация $X \to Y$	Эквивалентность $X \leftrightarrow Y$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Логические операции высказываний тесно связаны с операциями над множествами. Отрицание высказывания соответствует дополнению множества, конъюнкция и дизъюнкция высказываний – пересечению и объединению множеств, импликация – включению подмножества в множество, эквивалентность высказываний – равенству множеств.

Студент должен также представлять основные производные логические операции: *штрих Шеффера* $X | Y = \overline{X \wedge Y}$ (антиконъюнкция), *стрелка Пирса* $X \downarrow Y = \overline{X \vee Y}$ (антидизъюнкция), *сумма по модулю два* $X \oplus Y = \overline{X \leftrightarrow Y}$ (антиэквивалентность) ([1, часть 1, § 3], [2, § 13.1]) и уметь устанавливать эквивалентность (равносильность), наличие отношения следствия двух высказываний с помощью таблиц истинности.

Следует отметить, что составление таблиц истинности различных высказываний является наилучшим способом запоминания определений логических операций.

▷ **Пример 4.** С помощью таблиц истинности проверить эквивалентность формул: $X \to Y$, $\bar{X} \vee Y$ и $\overline{X \wedge \bar{Y}}$.

Р е ш е н и е. Составим таблицу истинности для данных формул (см. табл. 1, 2).

$\boldsymbol{X}$	$\boldsymbol{Y}$	$X \to Y$	$\bar{X}$	$\bar{X} \vee Y$	$\bar{Y}$	$X \wedge \bar{Y}$	$\overline{X \wedge \bar{Y}}$
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1

Сравнивая 3, 5 и 8-й столбцы, убеждаемся в эквивалентности рассматриваемых формул. ▶

Студенту необходимо освоить основные свойства логических операций:

- *идемпотентность* ($X \vee X \leftrightarrow X$, $X \wedge X \leftrightarrow X$);
- *коммутативность* ($X \vee Y \leftrightarrow Y \vee X$, $X \wedge Y \leftrightarrow Y \wedge X$);
- *ассоциативность* ($X \vee (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \vee Z$, $X \wedge (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \wedge Z$);
- *дистрибутивность* ($X \vee (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$, $X \wedge (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$);
- *двойное отрицание* ($\overline{\overline{X}} \leftrightarrow X$);
- *законы де Моргана* ($\overline{X} \vee \overline{Y} \leftrightarrow \overline{X \wedge Y}$, $\overline{X} \wedge \overline{Y} \leftrightarrow \overline{X \vee Y}$);
- *поглощение* ($X \vee (X \wedge Y) \leftrightarrow X$, $X \wedge (X \vee Y) \leftrightarrow X$);
- *исключение третьего* ($\overline{X} \vee X \leftrightarrow 1$);
- *противоречие* ($\overline{X} \vee X \leftrightarrow 0$) и др.

Студент должен уметь использовать эти свойства для упрощения формул алгебры логики. С этой целью часто используются следующие эквивалентные соотношения[1]: $X \to Y = \overline{X} \vee Y$, $X \leftrightarrow Y = (\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y})$, $X \leftrightarrow Y = (X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y})$ и др.

▷ **Пример 5.** Упростить формулу $A = \overline{X \to Y} \vee (Y \to \overline{X})$.

Р е ш е н и е. Используя дважды правило исключения импликации ($X \to Y = \overline{X} \vee Y$ – см. пример 4), получим $A = \overline{\overline{X} \vee Y} \vee (\overline{Y} \vee \overline{X})$. Применяя законы де Моргана, двойного отрицания, ассоциативности и поглощения, получим $A = (\overline{\overline{X}} \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{Y} \vee \overline{X}) = ((X \wedge \overline{Y}) \vee \overline{Y}) \vee \overline{X} = \overline{Y} \vee \overline{X}$. ▶

[1]Для упрощения записи здесь и далее вместо знака $\leftrightarrow$ используется знак равенства.

Непустое множество M любой природы $\{X, Y, Z, ...\}$, в котором определены отношение «=» (равно) и три операции «+» (сложение), « · » (умножение) и «–» (отрицание), подчиняющиеся коммутативным, ассоциативным и дистрибутивным законам, законам идемпотентности, двойного отрицания, де Моргана и поглощения, называется *булевой алгеброй*. Если под основными элементами X, Y, Z, ... подразумевать высказывания, а под операциями «+», « · », «–» – дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание соответственно, то алгебра высказываний есть интерпретация (модель) булевой алгебры.

При рассмотрении формул алгебры логики важно установить, является ли данная формула тождественно *истинной* (*тавтологией*), *тождественно ложной* (*противоречием*) или *выполнимой*. В первом случае формула принимает значение 1, во втором – значение 0 при любых значениях входящих в нее переменных, в третьем – значение 1 хотя бы при одном наборе значений переменных.

▷ **Пример 6.** Установить вид формулы алгебры логики

$$L = \left(\left(X \vee \bar{Y}\right) \to Y\right) \wedge \left(\bar{X} \vee Y\right).$$

Р е ш е н и е. Используя определение логических операций (см. табл. 1, 2), составим таблицу истинности формулы L:

X	Y	$\bar{Y}$	$X \vee \bar{Y}$	$A = X \vee \bar{Y} \to Y$	$\bar{X}$	$B = \bar{X} \vee Y$	$L = A \wedge B$
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

Из полученной таблицы видно, что формула L является выполнимой, так как она принимает значение 1, но не является тождественно выполнимой (тавтологией), ибо при определенных значениях высказываний она принимает значение 0. ▶

Методы алгебры логики могут быть использованы при решении логических задач. Имея конкретные условия логической задачи, стараются записать их в виде формул алгебры логики. Далее, упрощая полученную формулу и составляя ее таблицу истинности, удается найти ответ на вопрос задачи (см., например, [1, первое практическое занятие, задача 4], [2, пример 13.4]).

При изучении *булевых* (*логических*) *функций* (в которых сами функции и каждая из их переменных принимают одно из двух значений – 0 или 1) следует обратить внимание на то, что для них справедливы свойства, аналогичные свойствам высказываний.

Каждая булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ может быть представлена в виде *дизъюнктивной нормальной формы* (ДНФ) и *конъюнктивной нормальной формы* (КНФ). ДНФ (КНФ) формулы алгебры логики есть дизъюнкция (конъюнкция) элементарных конъюнкций (дизъюнкций), представляющих конъюнкции (дизъюнкции) переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ или их отрицаний. Любая булева функция может иметь много представлений в виде ДНФ и КНФ, среди которых особое место занимают *совершенные* ДНФ (СДНФ) и *совершенные* КНФ (СКНФ), которые согласно теореме о функциональной полноте единственны для любой булевой функции, отличной от константы 0 (для СДНФ) и отличной от константы 1 (для СКНФ).

СДНФ и СКНФ не содержат двух одинаковых элементарных конъюнкций (дизъюнкций), ни одна конъюнкция (дизъюнкция) не содержит одновременно двух одинаковых переменных, а также переменную и ее отрицание. При этом каждая конъюнкция (дизъюнкция) включает либо переменную x_i, либо ее отрицание для всех переменных, входящих в формулу.

Одним из способов построения СДНФ и СКНФ является способ, основанный на использовании таблицы истинности булевой функции.

Для построения СДНФ (СКНФ) для каждого набора значений переменных, на которых булева функции равна 1 (равна 0), выписывают конъюнкции (дизъюнкции) переменных: над теми переменными, которые на этом наборе равны 0 (равны 1), ставятся отрицания, и все такие конъюнкции (дизъюнкции) соединяются знаками дизъюнкций (конъюнкций).

▷ **Пример 7.** Найти СДНФ и СКНФ булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee x_3$.

Р е ш е н и е. Составим таблицу истинности функции $f(x_1, x_2, x_3)$.

x_1	x_2	x_3	$x_1 \wedge x_2$	$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee x_3$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

1. Функция $f(x_1, x_2, x_3)$ равна 1 на наборах (x_1, x_2, x_3): (0; 0; 1), (0; 1; 1), (1; 0; 1), (1; 1; 0), (1; 1; 1), т.е. соответствующие конъюнкции (над равными нулю переменными ставим знак отрицания): $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3$, $\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ и т.д. Соединяя их знаками дизъюнкции, получим СДНФ функции:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee$$
$$\vee (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

2. Функция $f(x_1, x_2, x_3)$ равна 0 на наборах (x_1, x_2, x_3): (0; 0; 0), (0; 1; 0), (1; 0; 0), т.е. соответствующие дизъюнкции (над равными единице переменными ставим знак отрицания): $x_1 \vee x_2 \vee x_3$, $x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$, $\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$. Соединяя их знаками конъюнкции, получим СКНФ функции:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3). \blacktriangleright$$

Алгебра высказываний использует логические значения высказываний (истина, ложь), не являющиеся математическими понятиями. В связи с этим желательно построить формальную математическую логику, не пользуясь понятиями истинности и ложности.

Исчисление высказываний – аксиоматическая логическая система, интерпретацией (моделью) которой является алгебра высказываний. Здесь мы вновь встречаемся с формулами алгебры логики. Однако теперь формулы рассматриваются не как способ представления функций, а как составные высказывания, образованные из элементарных высказываний (переменных) с помощью основных логических связок.

Из всех формул алгебры высказываний выделяется часть формул, объявляемых аксиомами. Определяется некоторое правило, по которому из одних формул можно получать другие (новые). Аксиомы выделяются, а правило определяется так, что по нему из аксиом могут быть получены все тождественно-истинные высказывания (тавтологии), и только они. Получение тавтологий алгебры высказываний, представленных в виде теорем, является основной задачей исчисления высказываний.

Исчисление высказываний строится следующим образом.

1. ***Алфавит*** исчисления высказываний состоит из переменных высказываний A, B, C, ..., знаков логических связок $\vee$, $\wedge$, $-$, $\rightarrow$ и скобок (,).

2. ***Формулы***:

а) всякая переменная A, B, C, ... является формулой;

б) если α и β – формулы[1], то $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $\overline{\alpha}$ – также формулы;

в) других формул, кроме отмеченных выше, нет.

3. ***Аксиомы***:

а) *система аксиом* I использует все логические связки.

I_1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;

I_2 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$;

I_3 $(A \wedge B) \rightarrow A$;

I_4 $(A \wedge B) \rightarrow B$;

I_5 $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$;

I_6 $A \rightarrow (A \vee B)$;

I_7 $B \rightarrow (A \vee B)$;

I_8 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$;

---

[1] Например, запись $\overline{A} \wedge BC$ формально не является формулой, в отличие, например, от формулы $(\overline{A}) \wedge (B \vee C)$, так как в ней отсутствуют скобки и связка между B и C.

I_9 $(A \to B) \to ((A \to \overline{B}) \to \overline{A})$;

I_{10} $\overline{\overline{A}} \to A$;

б) *система аксиом* II использует только две логические связки ($-$ и $\to$):

II_1 $A \to (B \to A)$;

II_2 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

II_3 $(\overline{A} \to \overline{B}) \to ((\overline{A} \to B) \to A)$.

Приведенные системы аксиом равносильны в том смысле, что, как можно показать, порождают одно и то же множество формул.

4. ***Правила вывода***:

а) *правило подстановки*. Если $\alpha(A)$ – выводимая (доказуемая) формула, содержащая буквы *A*, то выводима формула $\alpha(\beta)$, получаемая из α заменой *всех* вхождений *A* на произвольную формулу

$$\beta : \frac{\alpha(A)}{\alpha(\beta)}$$

(запись означает, что формула под чертой получена из формул над чертой);

б) *правило заключений* (Modus Ponens). Если α и $\alpha \to \beta$ – выводимые формулы, то β выводима:

$$\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}.$$

В этом описании исчисления высказываний аксиомы являются формулами исчисления (соответствующими определению формулы), формулы же, использованные в правилах вывода (α, $\alpha \to \beta$ и т.д.), – это «метаформулы», или «схемы формул».

Схема формул, например $\alpha \to \beta$, обозначает множество всех тех формул исчисления, которые получаются, если ее метапеременные заменить формулами исчисления (например, если α заменить на A, а β – на $A \wedge B$, то из схемы формул $\alpha \to \beta$ получим формулу $A \to A \wedge B$. Использование схем формул можно распространить и на аксиомы.

▷ **Пример 8.** Показать, что формула $A \to A$ выводима (доказуема) из системы аксиом[1] II, т.е. $\vdash A \to A$.

Решение. 1. Подставим в аксиому II_2 $A \to A$ вместо B и A вместо C. Получим: $\left(A \to \left(\left(A \to A\right) \to A\right)\right) \to \left(\left(A \to \left(A \to A\right) \to \left(A \to A\right)\right)\right)$.

2. Подставим в аксиому II_1 $A \to A$ вместо B: $A \to \left(\left(A \to A\right) \to A\right)$.

3. По правилу заключения из шагов 2, 1 найдем: $(A \to \left(A \to A\right) \to \left(A \to A\right)$.

4. Подставим в аксиому II_1 A вместо B: $A \to \left(A \to A\right)$.

5. По правилу заключения из шагов 4, 3 получим: $A \to A$.

6. Следовательно, $A \vdash B \to A$.

Пусть A выводима. Тогда из A и аксиомы II_1 по правилу заключения получаем $\dfrac{A, A \to \left(B \to A\right)}{B \to A}$, что и доказывает искомую выводимость. ▶

Подробнее материал об исчислении высказываний см., например, [4, § 6.1].

При изучении *предикатов* необходимо понимать, что они представляют собой предложения, содержащие предметные переменные, при замене которых конкретными значениями (элементами) рассматриваемых множеств они обращаются в высказывания, принимающие значения «истинно» или «ложно».

Особое внимание следует уделить кванторным операциям, применимым к предикатам. Необходимо знать определение *квантора общности* (*квантора существования*) – правила, которое каждому предикату $P(x)$, определенному на множестве X, сопоставляет выс-

[1] Факт выводимости (доказуемости) A обозначается $\vdash A$.

казывание, обозначаемое $(\forall x)(P(x))$ (или $(\exists x)(P(x))$, которое истинно тогда и только тогда, когда предикат $P(x)$ истинен для всех (хотя бы для одного) значений(я) из X.

Переход от $P(x)$ к $(\forall x)(P(x))$ или $(\exists x)(P(x))$ называется *связыванием* переменной x, или *навешиванием квантора* на переменную x.

При рассмотрении n-местных предикатов, содержащих n предметных переменных, студент должен понимать смысловое отличие, например, таких предикатов, как $(\forall x)(\forall y)\,(P(x,y))$, $(\forall x)(\exists y)(P(x,y))$, $(\exists x)(\forall y)(P(x,y))$, $(\exists x)(\exists y)(P(x,y))$.

Две формулы логики предикатов называются *равносильными*, если они принимают одинаковые логические значения при всех значениях входящих в них переменных. Обращаем внимание на ряд правил перехода от одних формул к другим, им равносильным:

• *перенос квантора через отрицание* (например, $\overline{(\forall x)W(x)}=(\exists x)\overline{W(x)}$, $\overline{(\exists x)W(x)}=(\forall x)\overline{W(x)}$);

• *вынос квантора за скобки* (например, $(\exists x)(W(x)\wedge B)=(\exists x)W(x)\wedge B$, $(\forall x)(W(x)\vee B)=(\forall x)W(x)\vee B$, B не содержит x);

• *перестановка одноименных кванторов* (например, $(\exists x)(\exists y)W(x,y)=(\exists y)(\exists x)W(x,y)$);

• *переименование связанных кванторов* (например, $(\forall x)W(x)=(\forall y)W(y)$).

Аналогично тому, как было построено исчисление высказываний, может быть построено и *исчисление предикатов*. Вывод системы аксиом высказываний, как и в случае исчисления высказываний, может осуществляться по-разному. Например, можно взять любую из систем аксиом I или II (см. с. 19, 20) с добавлением двух предикатных аксиом или к правилу заключений (Modus Ponens) добавить соответствующие правила введения кванторов общности и существования [4, § 6.3].

Следует отметить, что в алгебре высказываний использование таблиц истинности представляет достаточно эффективный способ решения вопроса о том, является ли данная формула тождественно истинной (тавтологией). В логике предикатов эффективного способа решения вопроса о том, является ли любая рассматриваемая формула общезначимой (всегда выполнимой), нет. В связи с этим аксиоматический подход здесь становится необходимым.

Тема 4. Теория графов

Основные определения: неориентированные и ориентированные графы, мультиграфы и кратные ребра. Смежность и инцидентность. Способы представления графов. Матрицы смежности и инцидентности. Операции над графами. Графы и бинарные отношения. Изоморфизм графов. Полные графы и клики. Пути, циклы, цепи, простые цепи в неориентированных графах. Связность и компоненты связности. Расстояния. Центр, радиус, диаметр графа. Обходы графов. Виды связности в ориентированных графах: сильная связность, односторонняя связность. Двудольные графы и формулировка задачи о паросочетаниях. Знаковые графы и понятие стабильности. Применение знаковых графов для формализации задач в социальной сфере. Деревья и их свойства. Цикломатическое число. Направленные деревья. Приложения деревьев: иерархии, классификации. Обходы деревьев ([1, часть 5], [2, § 14.1, 14.2]).

Основные понятия теории графов

Графом $G(V, E)$ называется конечное непустое множество вершин V и конечное множество ребер E. Каждое ребро связывает пару вершин. Если ребро e соединяет вершины v_1 и v_2, то говорят, что ребро e и вершины v_1, v_2 *инцидентны.*

Два ребра, связывающие одну и ту же пару вершин v_1 и v_2, называются *кратными*. Ребро, связывающее вершину саму с собой, называется *петлей*.

Степенью вершины графа называется число ребер графа, инцидентных этой вершине (петли считаются дважды). Степень вершины v обозначается $d(v)$. Вершина степени 0 называется *изолирован-*

ной, вершина степени 1 – *висячей*. Вершина графа называется *четной*, если ее степень четна, и *нечетной*, если нечетна.

Поскольку ребро, соединяющее вершины v_1 и v_2, добавляет по единице в степени ребер $d(v_1)$ и $d(v_2)$, справедливо соотношение:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m,$$

где m – количество ребер графа.

Граф называется *полным*, если каждые две различные его вершины соединены одним и только одним ребром.

Матрицей смежности графа $G(V, E)$ называется квадратная матрица $A(G)$ n-го порядка (n – число вершин) с элементами:

$$a_{ij} = \begin{cases} k, & \text{если в графе } G \text{ вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены } k \text{ ребрами;} \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Если в графе нет петель, то на главной диагонали матрицы смежности стоят нули. Если же в графе нет кратных ребер, то все элементы матрицы равны либо нулю, либо единице.

Матрицей инцидентности графа $G(V, E)$ называется матрица $B(G)$ размера $n \times m$ (n – число вершин, m – число ребер) с элементами:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i - \text{концевая вершина ребра } e_j; \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

▷ **Пример 9**. Для графа, изображенного на рис. 2, построить матрицы смежности и инцидентности.

Р е ш е н и е. Начнем с построения матрицы смежности $A(G)$. У данного графа пять вершин, следовательно, матрица смежности будет иметь размер 5×5. Поскольку у графа есть петля и она находится в первой вершине, то на главной диагонали элемент $a_{11} = 1$, а все остальные $a_{22} = a_{33} = a_{44} = a_{55} = 0$.

Ребро e_2 соединяет первую и вторую вершины. Других ребер, соединяющих эти же вершины, нет, следовательно, элементы $a_{12} = a_{21} = 1$. Аналогично, $a_{13} = a_{31} = 1$, $a_{14} = a_{41} = 1$, $a_{15} = a_{51} = 1$, $a_{23} = a_{32} = 1$, $a_{34} = a_{43} = 1$.

Ребра e_8 и e_9 соединяют четвертую и пятую вершины и являются кратными, поэтому $a_{45} = a_{54} = 2$. Все остальные элементы a_{ij} равны нулю.

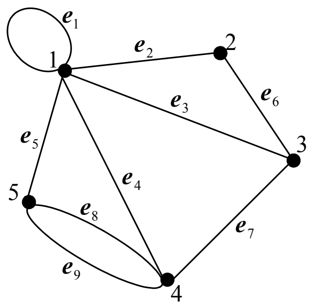


Рис. 2

Таким образом, матрица смежности имеет вид:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь построим матрицу инцидентности $B(G)$. Так как у графа пять вершин и девять ребер, матрица $B(G)$ есть матрица размера 5×9.

Первое ребро – это петля в первой вершине, поэтому в первом столбце, который соответствует первому ребру, только один элемент $b_{11} = 1$, а все остальные равны нулю.

Второе ребро соединяет первую и вторую вершины, следовательно, $b_{12} = b_{22} = 1$, а все остальные элементы второго столбца равны нулю.

Рассуждая аналогично, получаем матрицу инцидентности:

$$B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Ориентированные графы

Направленные ребра графа, т.е. ребра, для которых определены вершины, из которых они выходят, и вершины, в которые они входят, называются *дугами*. Если все ребра графа направлены, то он называется *ориентированным графом*, или *орграфом*.

Матрицей смежности ориентированного графа $G(V, E)$ называется квадратная матрица $A(G)$ n-го порядка (n – число вершин) с элементами:

$$a_{ij}=\begin{cases} k, \text{ если в графе } G \text{ есть } k \text{ дуг из } i\text{-й вершины в } j\text{-ю;} \\ 0, \text{ если иначе.} \end{cases}$$

Матрицей инцидентности ориентированного графа $G(V, E)$ называется матрица $B(G)$ размера $n \times m$ (n – число вершин, m – число ребер) с элементами:

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-я дуга начинается в } i\text{-й вершине;} \\ -1, \text{ если } j\text{-я дуга заканчивается в } i\text{-й вершине;} \\ 0, \text{ если иначе.} \end{cases}$$

▷ **Пример 10**. Построить орграфы по матрицам смежности и инцидентности:

$$1)\ A(G)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\2&0&0&0&1\\0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0\end{pmatrix};$$

$$2)\ B(G)=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&0&0&0\\-1&0&0&0&1&-1&0&0\\0&-1&1&0&-1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&-1&-1\\0&0&0&-1&0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1. Данная матрица смежности – квадратная матрица пятого порядка, следовательно, у рассматриваемого графа пять вершин. Первая и четвертая строки смежной матрицы нулевые, т.е. из первой и четвертой вершин не выходит ни одной дуги. Во второй строке два элемента отличны от нуля, причем $a_{21} = 2$, $a_{25} = 1$, следовательно, из второй вершины выходят три дуги: две в первую вершину и одна в пятую (рис. 3).

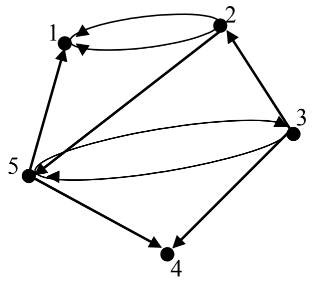


Рис. 3

В третьей и пятой строках по три единицы: $a_{32} = a_{34} = a_{35} = 1$ и $a_{51} = a_{53} = a_{54} = 1$, т.е. из третьей и пятой вершин выходят по три дуги: из третьей – во вторую, четвертую и пятую вершины, а из пятой – в первую, третью и четвертую.

2. Матрица инцидентности имеет размерность 5×8, т.е. у искомого графа пять вершин и восемь дуг. В первом столбце $a_{11} = 1$, $a_{21} = -1$, следовательно, первое ребро выходит из первой вершины и

входит во вторую. Второе ребро выходит из первой вершины и входит в третью и т.д. Искомый граф представлен на рис. 4. ▶

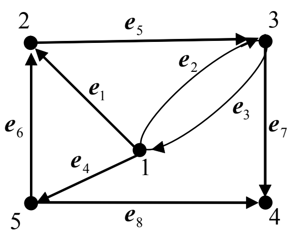


Рис. 4

▷ **Пример 11.** На множестве $V = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ задано отношение $f: x \geq y + 2$. Построить орграф данного отношения.

Решение. Пусть элементы множества $V = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ будут вершинами графа. Будем считать, что из вершины x проведена дуга в вершину y, если выполнено неравенство $x \geq y + 2$.

Из вершины, соответствующей числу 1, не выходит ни одна дуга (рис. 5), поскольку среди элементов множества V нет таких, что $1 \geq y + 2$.

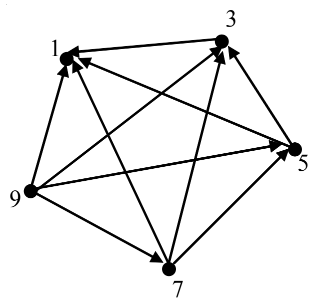


Рис. 5

Из вершины, соответствующей числу 3, будет выходить ровно одна дуга в вершину 1, поскольку для остальных элементов множества V неравенство $3 \geq y + 2$ не выполнено. Аналогично, из вершин 5, 7 и 9 будут выходить соответственно две, три и четыре дуги. ▶

Операции над графами

Граф $G' = (V', E')$, вершины и ребра которого являются вершинами и ребрами графа $G(V, E)$, т.е. $V' \subset V$, $E' \subset E$, называется *подграфом* графа G.

Подграф $G' = (V', E')$, графа $G(V, E)$, являющийся полным графом, называется *кликой*. *Максимальная клика* – это клика с максимально возможным числом вершин среди всех существующих клик графа.

У графа, изображенного на рис. 2, существует несколько клик, например, $G_1'\left(V_1', E_1'\right)$, где $V_1' = \{1; 2; 3\}$, $E_1' = \{e_2; e_3; e_6\}$, или $G_2'\left(V_2', E_2'\right)$, где $V_2' = \{1; 4; 5\}$, $E_2' = \{e_4; e_5; e_8\}$. Однако клики с четырьмя вершинами в этом графе нет, поскольку для ее существования необходимо, чтобы было четыре вершины со степенью три (без учета кратных ребер), а в данном графе таких вершин только три: первая, третья и четвертая.

Дополнением графа $G(V, E)$ называется граф $\bar{G}\left(V, \bar{E}\right)$, множество вершин которого совпадает с множеством вершин исходного графа, а множество ребер является дополнением множества E, т.е. $\bar{E} = \left\{e \in V_1 \times V_1 : e \notin E\right\}$.

Объединением графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$, таких, что $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$ и $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$, называется граф $G_1 \cup G_2$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cup V_2$, а множеством ребер – множество $E_1 \cup E_2$.

Пересечением графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G_1 \cap G_2$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cap V_2$, а множеством ребер – множество $E_1 \cap E_2$.

Маршруты, цепи и циклы

Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер $v_0\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2 \ldots e_k\, v_k$, в которой два любых соседних элемента инцидентны. Если $v_0 = v_k$, то маршрут называется *замкнутым*, а если $v_0 \neq v_k$, то *открытым*.

Длиной маршрута считается число ребер, которые он содержит.

Маршрут называется *цепью*, если каждое ребро встречается в нем не более одного раза. Цепь, в которой все вершины различны, называется *простой цепью*.

Замкнутая цепь называется *циклом*, а простая замкнутая цепь – *простым циклом*.

Если есть цепь, соединяющая две вершины v_0 и v_k, то есть и простая цепь, соединяющая эти вершины. Две вершины называются *связными*, если существует связывающая их простая сеть; в противном случае вершины называются *несвязными*.

Граф называется *связным*, если каждые две его вершины связные; в противном случае – *несвязным*.

Деревья

Неориентированный граф называется *деревом*, если он является связным и не имеет циклов.

Основные свойства деревьев:

• любые две вершины дерева можно соединить ровно одной простой цепью;

• если дерево G содержит хотя бы одно ребро, то на нем найдется висячая вершина;

• число ребер дерева G на единицу меньше числа его вершин.

Справедливо и обратное утверждение: *если у связного графа число ребер на единицу меньше числа вершин, то такой граф является деревом.*

Дерево $T(V, E_1)$, множество вершин которого совпадает с множеством вершин графа $G(V, E)$, а ребра являются ребрами графа $G(E_1 \subset E)$, называется *остовным* (*покрывающим*) *деревом* графа G. Иными словами, остовное дерево графа G – это его подграф, содержащий все вершины и являющийся деревом.

Если n – число вершин, а m – число ребер графа G, то любое его остовное дерево имеет n вершин и $(n - 1)$ ребер. Таким образом, остовное дерево получается отбрасыванием $(m - n + 1)$ ребер графа G. Число $\gamma = m - n + 1$ называется *цикломатическим числом* графа G.

Если каждому ребру графа приписано некоторое положительное число, называемое его *весом*, или *стоимостью*, то граф называется *нагруженным*. *Стоимостью* нагруженного графа считается суммарная стоимость всех его ребер. Многие задачи, связанные с построением экономичных систем сообщения или информационных систем, приводят к задаче поиска остовного дерева минимальной стоимости.

▷ **Пример 12.** Построить остовное дерево минимальной стоимости для графа, представленного на рис. 6. Определить его стоимость.

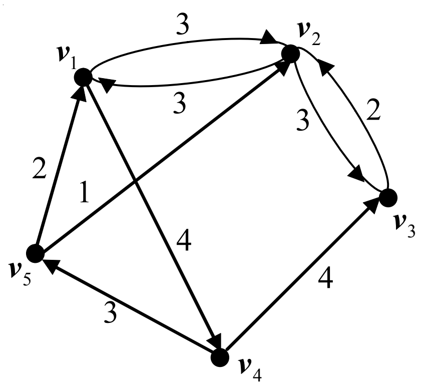


Рис. 6

Р е ш е н и е. Остовное дерево содержит все вершины исходного графа, т.е. в нем будет пять вершин и четыре ребра. Прежде всего, найдем на нагруженном графе самое «легкое» ребро. В данном случае это ребро, соединяющее вторую и пятую вершины (v_2 , v_5) и имеющее стоимость 1. Это будет первым ребром остовного дерева минимальной стоимости (рис. 7).

Теперь среди оставшихся ребер выберем следующие по стоимости ребра (v_1 , v_5) и (v_2 , v_3). Поскольку оба они соединяют одну из уже отобранных в оставное дерево вершин v_5 или v_2 с новой, еще не присоединенной вершиной v_1 и v_3 соответственно, то оба этих ребра нужно добавить к дереву.

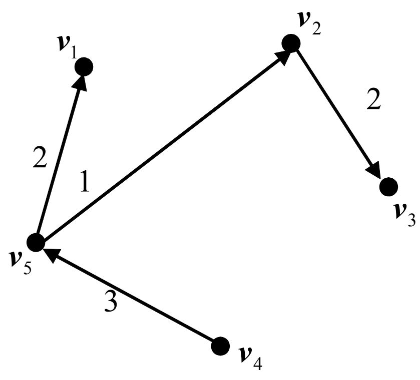


Рис. 7

Среди ребер стоимостью 3 два ребра (v_1 , v_2) и (v_2 , v_3) соединяют между собой вершины, уже присоединенные к дереву, и, следовательно, не могут быть включены в него. Третье ребро (v_4 , v_5) соединяет вершину дерева v_5 с еще не присоединенной вершиной v_4 , т.е. может быть присоединено к дереву. Получившееся остовное дерево имеет минимальную стоимость, которая равна сумме стоимостей ребер, отобранных в него: 1 + 2 + 2 + 3 = 8. ▶

Тема 5. Теория алгоритмов

Общее понятие алгоритма[1] *. Требования к алгоритмам*. Понятие рекурсии. Рекурсивные функции. Простейшие рекурсивные функции. Операторы образования примитивно-рекурсивных и частично-рекурсивных функций. Тезис Чёрча. Разрешимые и перечислимые множества. Машины Тьюринга*. Универсальная машина Тьюринга** ([1, часть 8, кроме раздела III], [2, § 14.1, 14.2]).

Интуитивное определение алгоритма

Основным понятием теории алгоритмов является понятие алгоритма.

Алгоритмом называется точное предписание, определяющее вычислительный процесс, который ведет от варьируемых исходных данных к искомому результату, т.е. алгоритм – это совокупность правил (процедур), определяющих данный вычислительный процесс.

Данная процедура предполагает наличие некоторых начальных или исходных данных P (входной объект) и направлена на получение обусловленного этими данными определенного результата Q (объекта на выходе). Например, при вычислении ранга матрицы начальными данными служит прямоугольная таблица, составленная из $n \times m$ рациональных чисел, а результатом – натуральное число, являющееся рангом данной матрицы.

[1] Здесь и далее учебный материал, отмеченный знаком *, не является обязательным, так как он рассматривается также в дисциплине «Теоретические основы информатики».

Вычислительная процедура состоит из отдельных элементарных шагов – тактов работы алгоритма. Каждый шаг заключается в смене одного набора данных другим. Переход от предыдущего состояния к последующему происходит по заранее заданному конечному набору инструкций.

Пусть некоторый алгоритм имеет исходный набор данных P. Возможны три случая протекания алгоритмического процесса.

1. На некотором шаге возникает состояние, опознаваемое как заключительное. При этом происходит остановка вычислений и выдается результат Q.

2. Каждое очередное состояние сменяется последующим до бесконечности, т.е. процесс вычислений никогда не останавливается.

3. При некотором состоянии возникает ситуация, когда процесс вычислений обрывается без выдачи результата (например, не срабатывает инструкция для определения результата вычислений). Тем самым нет перехода к следующему шагу и нет результата вычислений. В этом случае говорят, что произошла *безрезультативная остановка*.

Считается, что алгоритм применим к исходному набору данных P тогда и только тогда, когда выполнен первый случай. При этом алгоритм должен обладать определенными свойствами (см. [1, часть 8, п. 2], [2, § 14.1]).

Далее рассмотрим еще два варианта определения алгоритма – рекурсивные функции и машину Тьюринга.

Рекурсивные функции

Рассмотрим класс арифметических функций $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенных на множестве N_0. Под множеством N_0 будем понимать множество натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ и ноль, т.е. $N_0 = N \cup \{0\}$.

Если это необходимо, то в обозначении такой функции используется верхний индекс n, который указывает на число независимых переменных. Так, функция $f^n(x_1, x_2, ..., x_n)$ зависит от n переменных и называется *n-арной*. Таким образом, $f^n\colon N_0^n \to N_0$. При этом данные функции могут быть *частично определенными*, т.е. определенными не для всех наборов натуральных чисел. Множество всех наборов значений, для которых функция определена, называется *областью определения функции*. Множество всех значений функции называется *областью значений функции*.

Функция называется *всюду определенной*, если она определена для любого набора $(x_1, x_2, ..., x_n) \in N_0^n$.

Арифметические функции вида $f^n\colon N_0^n \to N_0$, для которых существует алгоритм их вычисления, называются *вычислимыми функциями*.

Под *рекурсией*, или *рекурсивной функцией*, понимается метод определения функции через ее предыдущие и ранее определенные значения, а также способ организации вычислений, при котором функция вызывает сама себя с другим аргументом.

Рекурсивные функции являются частично определенными функциями, поэтому их часто называют *частично-рекурсивными функциями*. Рекурсивные функции, определенные при любых значениях аргументов, называют *общерекурсивными функциями*.

Классический пример функции, определение которой может задаваться в рекурсивной форме, – определение «факториала» $f(n) = n!$:

$$0! = 1,$$
$$f(n) = n \cdot f(n-1).$$

Прежде чем строить рекурсивные функции, полезно вспомнить, как определяются *элементарные функции*. Вначале рассматривается несколько классов функций: алгебраические, тригонометрические, показательные, логарифмические. Элементарная функция определяется как *суперпозиция* этих функций (сложная функция).

Рекурсивные функции строятся аналогичным образом.

Рассмотрим вначале некоторый набор простейших функций, вычислимость которых очевидна. Такие функции называются *примитивно-рекурсивными*. Простейшие примитивно-рекурсивные функции задаются следующим образом.

1. *Функция следования*. Рассмотрим функцию, которая задается формулой

$$s(x) = x + 1 \text{ (или } s^1(x) = x + 1\text{)}.$$

Очевидно, что эта функция является вычислимой, так как алгоритм ее вычисления состоит из простейшего действия «добавления к x единичкам еще одной единицы».

2. *Функция аннулирования*. Пусть $n \geq 0$. Рассмотрим n-арную функцию $0^n(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданную правилом:

$$0^n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \text{ для всех } x_1, x_2, ..., x_n \in N_0.$$

Эта функция называется *нулевой функцией*. Очевидно, что она вычислима. Нулевую функцию при $n = 1$ обозначают через $0(x)$. Поэтому

$$0(x) = 0 \text{ для всех } x \in N_0 .$$

Нулевая функция при $n = 0$ обозначается через 0^0 и отождествляется с числом 0.

3. *Функция тождества*. Функция тождества или проектирования определяется следующим образом:

$$I_i^n(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) = x_i, \quad 1 \leq i \leq n ,$$

то есть эта функция произвольному n-мерному вектору сопоставляет его i-ю координату. Вычислимость функции тождества обеспечивается нашей способностью найти в строке $(x_1, x_2, ..., x_n)$ место с номером i и указать число на этом месте.

Имея набор *простейших* (*базисных*) *примитивно-рекурсивных* функций, можно получить новые вычислимые примитивно-рекурсивные и частично-рекурсивные функции с помощью следующих трех операторов.

1. *Оператор суперпозиции*. Пусть задана функция $h^m(g_1, g_2, ..., g_m)$ от m переменных и заданы m функций $g_1^n(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_2^n(x_1, x_2, ..., x_n), ..., g_m^n(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных. Тогда новую функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определим по правилу:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = h^m(g_1^n(x_1, x_2, ..., x_n), g_2^n(x_1, x_2, ..., x_n), ..., g_m^n(x_1, x_2, ..., x_n)).$$

Функция f является частично определенной функцией от n переменных. Ее значение $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определено тогда и только тогда, когда определены все выражения в правой части последнего соотношения. Если функции $h, g_1, g_2, ..., g_m$ вычислимы, то и функция f также вычислима.

В частности, при $m = 1$ и $n = 1$ функция получается с помощью оператора суперпозиции из функций $h(x)$ и $g(x)$ следующим образом:

$$f(x) = h(g(x)) \text{ для всех } x \in N_0.$$

▷ **Пример 13.** Функцию $f(x) = 1$ получить суперпозицией функций $0(x)$ и $s(x)$.

Р е ш е н и е. По условию $f(x) = s(0(x))$. Поэтому

$$f(x) = s(0(x)) = s(0) = 0 + 1 = 1. \blacktriangleright$$

Аналогичным образом можно получить функции вида $f(x) = n$ для всех значений n, т.е.

$$f(x) = \underbrace{s(s(...s}_{n \text{ раз}}(0(x)))).$$

Для правильного применения операции суперпозиции функций необходимо соблюдение следующего условия: каждая функция $g_i^n(x_1, x_2, ..., x_n),\ i = 1, 2, ..., m$ должна быть функцией n аргументов.

▷ **Пример 14.** Рассмотрим вычисление дискриминанта квадратного трехчлена. Дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ можно рассматривать как функцию трех переменных $f(a, b, c)$. Если в качестве функции h рассмотреть функцию $h(g_1, g_2) = g_1 - g_2$, то функцию $f(a, b, c) = b^2 - 4ac$ можно представить в виде $f(a, b, c) = h(b^2, 4ac)$. Это означает, что $g_1 = b^2$, а $g_2 = 4ac$. Очевидно, что функция g_1 является функцией одной переменной, а функция g_2 – функцией двух переменных. Для корректного применения операции суперпозиции необходимо, чтобы функции g_1 и g_2 были функциями трех переменных (a, b, c). Поэтому в общей записи этих функций необходимо предположить, что они зависят от трех переменных, т.е. взять их в виде $g_1^3(a,b,c) = b^2,\ g_2^3(a,b,c) = 4ac.$ ▶

2. *Оператор примитивной рекурсии.* Пусть заданы две примитивно-рекурсивные функции $g^n(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $h^{n+2}(x_1, x_2, ..., x_n, y, z)$, зависящие соответственно от n и $n + 2$ переменных. Оператор примитивной рекурсии позволяет построить новую функцию $f^{n+1}(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ от $n + 1$ переменной. Значения новой функции f вычисляем по двум правилам:

$$f^{n+1}(x_1, x_2, ..., x_n, 0) = g^n(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$f^{n+1}(x_1, x_2, ..., x_n, y+1) = h^{n+2}(x_1, x_2, ..., x_n, y, f^{n+1}(x_1, x_2, ..., x_n, y)).$$

Тогда функция $f^{n+1}(x_1, x_2, ..., x_n, y)$, полученная с помощью оператора примитивной рекурсии, обозначается $f^{n+1} = R_n(g^n, h^{n+2})$.

Слово «рекурсия» (от лат. recurso – возвращаюсь) означает вычисление значения функции $f^{n+1}(x_1, x_2, ..., x_n, y + 1)$ с использованием $f^{n+1}(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ (возвращение к ранее вычисленному значению), т.е. сначала (при фиксированных значениях $x_1, x_2, ..., x_n$) определяется значение функции f^{n+1} при $y = 0$, а затем каждое последующее значение функции (зависящее от $y + 1$) выражается через ее предыдущее значение (зависящее от y).

Если $n = 0$, то можно получить функцию одной переменной. В этом случае функция g имеет ноль переменных и поэтому отождествляется как некоторая постоянная величина a (константа), т.е. $g^0 = g = a$. Функция $h^{n+2} = h^2$ зависит от двух переменных. Обозначим ее так: $h^2(y, z) = h(y, z)$. Тогда, применяя оператор примитивной рекурсии, получим:

$$f(0) = a,$$

$$f(y+1) = h(y, f(y)).$$

Как и в случае оператора суперпозиции, вычислимость исходных функций g и h влечет за собой вычислимость построенной из них функции f.

▷ **Пример 15.** Даны функции $g(x) = 2$ и $h(y, z) = y + z$. Определить функцию $f(y)$, полученную из данных функций по схеме примитивной рекурсии.

Р е ш е н и е. Найдем значения функции $f(y)$.

$$f(0) = g(x) = 2,$$

$$f(1) = h(0, f(0)) = h(0, 2) = 0 + 2 = 2;$$

$$f(2) = h(1, f(1)) = h(1, 2) = 1 + 2 = 3;$$

$$f(3) = h(2, f(2)) = h(2, 3) = 2 + 3 = 5;$$

$$f(4) = h(3, f(3)) = h(3, 5) = 3 + 5 = 8 \text{ и т.д.}$$

Можно предположить, что $f(y) = 2 + \frac{y(y-1)}{2}$, и доказать эту формулу методом математической индукции по переменной y. ▶

▷ **Пример 16.** Даны функции $g(x) = x$ и $h(x, y, z) = xz$. Определить функцию $f(x, y)$, полученную из данных функций по схеме примитивной рекурсии.

Р е ш е н и е. Найдем значения функции $f(x, y)$:

$$f(x, 0) = g(x) = x,$$

$$f(x, 1) = h(x, 0, f(x, 0)) = h(x, 0, x) = x \cdot x = x^2;$$

$$f(x, 2) = h(x, 1, f(x, 1)) = h(x, 1, x^2) = x \cdot x^2 = x^3;$$

$$f(x, 3) = h(x, 2, f(x, 2)) = h(x, 2, x^3) = x \cdot x^3 = x^4 \text{ и т.д.}$$

Можно предположить, что $f(x, y) = x^{y+1}$, и доказать эту формулу методом математической индукции по переменной y. ▶

Теперь определим примитивно-рекурсивные функции более строго.

Примитивно-рекурсивными функциями называются функции, полученные из простейших примитивно-рекурсивных функций с помощью конечного числа операторов суперпозиции и (или) примитивной рекурсии.

▷ **Пример 17.** Доказать, что функция $f(x, y) = x + y$ примитивно-рекурсивна.

Р е ш е н и е. Функция f является функцией двух переменных. Следовательно, функция g должна зависеть от одной переменной, а функция – от трех. Пользуясь заданием функции, найдем ее значения:

$$f(x,\,0)=x=g(x)=I_1^1(x)\,,$$

$$f(x,\,y+1)=x+y+1=f(x,\,y)+1=s^1\left(f(x,\,y)\right)=h\left(x,\,y,\,f(x,\,y)\right),$$

т. е.

$$h\left(x,y,z\right)=s^1(z)=s(z)=s\left(I_3^3\left(x,y,z\right)\right).$$

Таким образом, функция $f(x, y) = x + y$ получена по схеме примитивной рекурсии ($f = R_1(g, h)$) из простейших примитивно-рекурсивных функций, а следовательно, сама является примитивно-рекурсивной. ▶

▷ **Пример 18.** Доказать, что функция $f(x, y) = xy$ примитивно-рекурсивна.

Р е ш е н и е. Функция f является функцией двух переменных. Следовательно, функция g должна зависеть от одной переменной, а функция h – от трех. Пользуясь заданием функции, найдем ее значения:

$$f(x,\,0)=0=g(x)=0_1^1(x),$$

$$f(x,\,y+1)=x\cdot(y+1)=xy+x=f(x,y)+x=$$
$$=\underbrace{s(s(\ldots s}_{x\ \text{раз}}\left(f(x,y)\right)))=h\left(x,y,f(x,y)\right),$$

т. е.

$$h\left(x,y,z\right)=\underbrace{s(s(\ldots s}_{x\ \text{раз}}\left(z\right)))=\underbrace{s(s(\ldots s}_{x\ \text{раз}}\left(z\right)))=\underbrace{s(s(\ldots s}_{x\ \text{раз}}\left(I_3^3(x,y,z)\right)))\,.$$

Таким образом, функция $f(x, y) = xy$ получена по схеме примитивной рекурсии ($f = R_1(g, h)$) из простейших примитивно-рекурсивных функций, а следовательно, сама является примитивно-рекурсивной.

Аналогично, можно показать, что следующие функции также являются примитивно-рекурсивными: $f(x) = a$, $f(x) = x + a$, $f(x, y) = x^y$, $f(x, y) = x!$,

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x=0,\\ 1, \text{ если } x>0,\end{cases} \qquad \overline{\operatorname{sgn}}(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x=0,\\ 0, \text{ если } x>0.\end{cases}$$ ▶

3. *Операция минимизации*. Операция минимизации по i-й переменной функции $f^n(x_1, x_2, ..., x_n)$ обозначается как $\mu_y\left(f^n\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., x_n\right)=x_i\right)$ и определяется следующим образом.

Рассмотрим уравнение относительно y:

$$f^n\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., x_n\right)=x_i\,.$$

Это уравнение решается подбором, вместо переменной y последовательно подставляются 0, 1, 2, ... При этом возможны следующие случаи.

• На некотором шаге левая часть соотношения не определена. Следовательно, на наборе $(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ операция минимизации не определена.

• На каждом шаге левая часть соотношения определена, но равенство не выполняется ни при каких значениях y. Следовательно, на наборе $(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ операция минимизации не определена.

• Левая часть соотношения определена при $y \le z$, но при $y < z$ равенство не выполняется, а при $y = z$ выполняется. В этом случае число z считается значением операции минимизации на наборе $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

▷ **Пример 19.** Найти функции, получаемые из числовой функции $f(x_1, x_2, x_3)=1-\dfrac{x_1}{x_2}$ с помощью оператора минимизации по каждой ее переменной.

Р е ш е н и е. Минимизируем функцию по переменной x_1. Рассмотрим уравнение $1-\dfrac{y}{x_2}=x_1$.

1. Если $x_1 = 1$, $x_2 \neq 0$, то при подстановке $y = 0$ в уравнение получаем верное равенство.

2. Если $x_2 = 0$, то левая часть уравнения не определена.

3. Если $x_1 \neq 1, x_2 \neq 0$, то при подстановке $y = 1$ в левой части уравнения появляется выражение $\frac{1}{x_2}$, не имеющее смысла, и в этом случае операция минимизации не определена.

Если $x_2 = 1$, то получаем равенство $1 - y = x_1$. Оно имеет смысл только при $x_1 = 1$, т.е. $y = 0$, что рассмотрено в первом пункте, и при $x_1 = 0$, т.е. $y = 1$. При $x_1 > 1$ равенство не имеет смысла.

Таким образом,

$$\mu_y\left(1 - \frac{y}{x_2} = x_1\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_1 = 1, \quad x_2 \neq 0; \\ \text{не определено, если } x_2 = 0; \\ \text{не определено, если } x_1 > 1, \quad x_2 \neq 0; \\ x_2, \text{ если } x_1 = 0. \end{cases}$$

Минимизируем функцию по переменной x_2. Рассмотрим уравнение $1 - \frac{x_1}{y} = x_2$. Это уравнение на самом первом шаге, при подстановке вместо y нуля, теряет смысл, значит, операция минимизации по второй переменной $\mu_y\left(1 - \frac{x_1}{y} = x_2\right)$ нигде не определена.

Минимизируем функцию по переменной x_3. Рассмотрим уравнение $1 - \frac{x_1}{x_2} = x_3$. Последнее соотношение должно выполняться при любом значении y. В частности, оно должно иметь смысл и на первом шаге, т.е. при $y = 0$. В остальных случаях значение операции минимизации не определено. Таким образом, имеем

$$\mu_y\left(1-\frac{x_1}{x_2}=x_3\right)=\begin{cases}0, \text{если } 1-\dfrac{x_1}{x_2}=x_3;\\ \text{не определено в остальных случаях.}\end{cases}$$ ▶

▷ **Пример 20.** Найти функции, получаемые из числовой функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2$ с помощью оператора минимизации по каждой ее переменной.

Р е ш е н и е. Минимизируем функцию по переменной x_1. Рассмотрим уравнение $y - 2x_2 = x_1$. Очевидно, что $\mu_y(y-2x_2=x_1)=x_1+2x_2$.

Минимизируем функцию по переменной x_2. Рассмотрим уравнение $x_1 - 2y = x_2$. Разрешая последнее уравнение относительно y, получим, что

$$\mu_y(x_1-2y=x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_1-x_2}{2}, \quad \text{если } x_1\geq x_2 \text{ и } x_1-x_2=2k, \quad k\in N_0;\\ \text{не определена, если } x_1<x_2\\ \text{или } x_1-x_2=2k+1, \quad k\in N_0.\end{cases}$$ ▶

*Машины Тьюринга**

Машина Тьюринга – это модель алгоритма, которая иллюстрирует процессы, происходящие при реализации алгоритма. Машина Тьюринга является гипотетической машиной. Ее составляют следующие компоненты.

1. *Управляющее устройство*, которое в каждый данный момент времени может находиться в одном и только одном из некоторого множества состояний. Состояния обозначаются буквами так называемого *внутреннего алфавита* $Q = \{q_0, q_1, ..., q_m\}$. Состояние q_1, как правило, считают *начальным* состоянием, а состояние q_0 – *конечным* (*заключительным*). Во внутренний алфавит включают также символы сдвига: R – вправо, L – влево, E – на месте.

2. *Лента*, разделенная на ячейки и предполагающаяся потенциально бесконечной в обе стороны (имеется в виду, что в каждый момент времени лента содержит конечное число ячеек, но при необхо-

димости число ячеек можно увеличивать). В каждой ячейке может быть записан один и только один символ некоторого внешнего алфавита $A = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$. Символ a_0 принято считать пустым символом. Он обозначает пустую ячейку. По умолчанию во всех ячейках, в которых не записаны символы $a_1, a_2, ..., a_n$, записан символ a_0. В качестве внешнего алфавита будем рассматривать алфавит $E = \{0, 1\}$, при этом 0 соответствует пустому символу.

3. *Считывающая и пишущая головка*, которая в каждый данный момент времени обозревает одну ячейку (рис. 8).

…	a_0	a_1	a_2	…	0	…
					↑ q_1	

Рис. 8

Так, на рис. 8 считывающая головка обозревает ячейку ленты, в которой записан символ a_n. Управляющее устройство находится в состоянии q_1 (начальном состоянии). В зависимости от состояния управляющего устройства головка либо оставляет обозреваемый символ без изменения, либо записывает на его место любой другой символ внешнего алфавита, либо стирает обозреваемый символ. Далее головка либо остается на месте, либо передвигается на одну ячейку вправо или влево, при этом управляющее устройство переходит в некоторое новое состояние (состояние может и не меняться).

Каждое перемещение головки и изменение состояния управляющего устройства можно определить *командой*, которая обычно записывается в виде

$$q_i a_j q_{ij} a_{ij} D_{ij} ,$$

где q_i – состояние, в котором управляющее устройство находится в данный момент;

a_j – символ, обозреваемый головкой;

q_{ij} – состояние, в которое управляющее устройство переходит в зависимости от состояния q_i и обозреваемого символа a_j;

a_{ij} – новый символ, записываемый в ячейку и зависящий от q_i и a_j;

D_{ij} – символ сдвига, указывающий направление движения головки, который также зависит от q_i и a_j.

Список команд для машины Тьюринга называется *программой*. Существует взаимно однозначное соответствие между машинами Тьюринга и программами.

Вид ленты в каждый момент времени может быть определен *конфигурацией* вида

$$a_{j_1} \ldots a_{j_{l-1}} q_i a_{j_l} \ldots a_{j_s}.$$

Головкой в данный момент обозревается символ a_{j_l}, записанный в конфигурации первым справа от символа q_i. Первый и последний символы в данной конфигурации непустые. Считается, что остальные символы на ленте, не записанные в конфигурацию, являются пустыми, т.е. в данный момент времени на ленте записано слово $a_{j_1} \ldots a_{j_{l-1}} a_{j_l} \ldots a_{j_s}$.

Конфигурация, соответствующая началу работы машины, называется *начальной*. Будем говорить, что непустое слово в алфавите $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ воспринимается машиной в *стандартном начальном положении*, если это слово записано в последовательных ячейках ленты, а все другие ячейки пусты и машина обозревает крайнюю слева ячейку из тех, в которых записано слово.

Если в процессе работы машина достигает заключительного состояния, то соответствующая конфигурация называется *заключительной*. Машина может прекратить работу также и в том случае, когда в программе отсутствует команда для некоторого состояния и некоторого символа.

Если машина Тьюринга T, начав работу на некотором слове P, останавливается через некоторое число шагов, то считается, что она применима к слову P. Результатом применения машины к слову является слово $T(P)$, которое соответствует заключительной конфигурации. Если же машина, начав работу на слове P, никогда не останавливается, то говорят, что она не применима к слову P.

Рассмотрим машину Тьюринга, алфавит которой $A = \{0, 1\}$ состоит из двух символов: 0 – пустой символ, 1 – символ занятости ячейки. В этом алфавите любое целое неотрицательное число n можно представить $n + 1$ символами 1, записанными в соседних ячейках ленты, в силу того, что число 0 записывают в виде ...010..., а любое натуральное число n представимо следующим образом: $...0\underbrace{11...1}_{n+1}0...$

Приняв сокращенную форму записи, в которой записанные подряд n единиц обозначаются как 1^n, а записанные подряд m нулей – как 0^m, то любое натуральное число n представимо в виде $...01^{n+1}0...$

▷ **Пример 21.** Машина Тьюринга задана программой

$$T:\begin{cases} q_1 0 q_0 1E \\ q_1 1 q_1 1R \end{cases}.$$

Предполагая, что машина Тьюринга находится в стандартном начальном положении, применим ее к слову $P = 1^2$.

Р е ш е н и е. Посмотрим, в какое слово переработает эта машина слово ...011..., исходя из стандартного начального положения. Будем последовательно выписывать конфигурации машины при переработке ею этого слова.

Учитывая стандартное начальное положение, можно сказать, что машина находится в состоянии q_1 и читает символ 1, записанный в обозреваемой ячейке:

…	0	1	1	0	…	
		↑				
		q_1				

Следовательно, машина будет выполнять вторую команду $q_1 1 q_1 1R$, согласно которой 1 остается в обозреваемой ячейке, машина остается в прежнем состоянии q_1, а головка сдвигается на одну ячейку ленты вправо и на машине создается следующая конфигурация:

…	0	1	1	0	…	
			↑			
			q_1			

На втором шаге машина снова будет выполнять команду $q_1 1 q_1 1R$ и примет следующую конфигурацию:

…	0	1	1	0	…	
				↑		
				q_1		

На третьем шаге выполняется команда $q_1 0 q_0 1 E$, согласно которой машина читает в обозреваемой ячейке символ 0, стирает его, записывает на его место символ 1 и переходит в заключительное состояние q_0:

…	0	1	1	1	0	…
				↑		

Таким образом, исходное слово $P = 11 = 1^2$ переработано машиной в слово $T(P) = 111 = 1^3$. ▶

Обобщая приведенный выше пример к слову $P = 1^n$, можно сделать вывод о том, что на каждом такте машина Тьюринга будет оставлять обозреваемую 1 на месте и сдвигаться вправо на одну ячейку. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока управляющая головка не выйдет на пустую ячейку с символом 0. Здесь согласно программе в ячейку будет вписана единица, и машина остановится. В результате на ленте будет записано $n + 1$ единиц. Если условиться, что исходное слово выражает число x, представляющее собой натуральное число, равное $n - 1$, то можно считать, что машина вычисляет функцию следования $s(x) = x + 1$.

▷ **Пример 22.** Дана машина Тьюринга

$$T : \begin{cases} q_1 0 q_1 0 R \\ q_1 1 q_2 0 R \\ q_2 1 q_1 0 R \end{cases} .$$

Выяснить, применима ли машина Тьюринга к слову P: а) $P = 1^3 01$; б) $P = 1^6$. Если применима, то выписать результат $T(P)$ работы машины T к слову P. Предполагается, что в начальный момент времени головка машины находится в стандартном начальном положении, т.е. обозревает самую левую единицу слова.

Р е ш е н и е. а) Применяя машину T к слову P, получаем последовательность конфигураций:

1) $q_1 1^3 01$	3) $q_1 101$
2) $q_2 1^2 01$	4) $q_2 01$

Вид второй конфигурации обусловлен тем, что символ 0 считается пустым символом и может не записываться.

Поскольку команда вида $q_2 0 q_i \alpha D$ в программе отсутствует, то последняя конфигурация является заключительной. Следовательно, машина T к слову P применима, и $T(P) = 1$.

б) Получаем следующие конфигурации:

1) $q_1 1^6$	2) $q_2 1^5$	3) $q_1 1^4$	4) $q_2 1^3$	5) $q_1 1^2$
6) $q_2 1$	7) $q_1 0$	8) $q_1 0$	9) $q_1 0$	…

Процесс продолжается неограниченно, головка смещается по ленте вправо до бесконечности, следовательно, машина T к слову $P = 1^6$ не применима.

Вид конфигурации 8 обусловлен тем, что символ 0 (пустой символ) находится справа от последней единицы слова по умолчанию. ▶

▷ **Пример 23.** Построить в алфавите {0, 1} машину Тьюринга, обладающую следующими свойствами:

а) машина имеет одно состояние, одну команду и применима к любому слову в алфавите {0,1};

б) машина имеет одно состояние, две команды, не применима ни к какому слову в алфавите {0,1}, и в процессе работы головка обозревает бесконечное множество ячеек;

в) машина имеет две команды, не применима ни к какому слову в алфавите {0, 1}, и в процессе работы головка обозревает одну ячейку.

Предполагается, что в начальный момент времени головка машины обозревает самый левый символ слова.

Р е ш е н и е. а) Рассмотрим произвольное слово P и предположим, что машина Тьюринга T имеет одно состояние q_1 и находится в стандартном начальном положении. В качестве команды возьмем команду вида $q_1 1 q_1 1 R$, согласно которой, если слово P ненулевое, то на каждом такте машина Тьюринга будет оставлять обозреваемую 1 на месте и сдвигаться вправо на одну ячейку. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока управляющая головка не выйдет на пустую ячейку с символом 0. Поскольку команда вида $q_1 0 q_1 \alpha D$ в программе отсутствует, то последняя конфигурация является заключительной.

Последнее обстоятельство относится и к нулевому слову P. Следовательно, машина T применима к любому к слову P, и $T(P) = P$.

б) Воспользуемся результатом решения предыдущей задачи и дополним программу машины T, например, следующей командой: $q_1 0 q_1 0 R$. В этом случае машина Тьюринга будет обозревать бесконечное множество ячеек и никогда не остановится.

в) В качестве такой машины можно рассмотреть машину T, имеющую программу $T:\begin{cases} q_1 0 q_1 0 E \\ q_1 1 q_1 1 E \end{cases}$, согласно которой машина T оставляет обозреваемую ячейку без изменения, а управляющая головка остается на месте. ▶

2. Вопросы для самопроверки

1. Понятие множества. Основные понятия (универсальное, счетное и пустое множество). Равные и эквивалентные множества.

2. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, дополнение. Диаграммы Венна. Примеры.

3. Понятие кортежа. Прямое (декартово) произведение множеств. Примеры.

4. Бинарное отношение (определение), его область определения, область значений, свойства (рефлексивность, симметричность, транзитивность). Отношения эквивалентности и порядка.

5. Мощности конечных множеств. Принцип включений-выключений. Примеры. Понятие мощности бесконечных множеств.

6. Определение функции как бинарного отношения. Функция как отображение одного множества на другое. Область определения и область значений функции. Примеры.

7. Основные правила комбинаторики (правило суммы и правило произведения). Примеры.

8. Комбинации элементов: размещения, сочетания, перестановки (без повторений). Формулы нахождения числа таких комбинаций. Примеры.

9. Комбинации элементов: размещения, сочетания, перестановки (с повторениями). Формулы нахождения числа таких комбинаций. Примеры.

10. Понятие высказывания. Основные логические операции (связки): отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, их таблицы истинности и взаимосвязь с операциями над множествами.

11. Основные логические операции (связки): импликация, эквивалентность, их таблицы истинности и запись с помощью дизъюнкций, конъюнкций и отрицаний.

12. Понятие о производных логических операциях (связках): штрих Шеффера, стрелка Пирса, сумма по модулю два. Таблица истинности этих операций.

13. Основные свойства логических операций: идемпотентность, коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность. Примеры.

14. Основные свойства логических операций: двойное отрицание, законы де Моргана, поглощение. Примеры.

15. Понятие о булевой алгебре. Алгебра высказываний как интерпретация булевой алгебры.

16. Формулы алгебры логики и их виды: тождественно истинные, тождественно ложные и выполнимые. Примеры.

17. Булевы (логические) функции. Равенство функций. Булевы функции одной и двух переменных.

18. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), совершенная ДНФ (СДНФ) алгебры логики и их свойства.

19. Конъюнктивная нормальная форма (КНФ), совершенная КНФ (СКНФ) алгебры логики и их свойства.

20. Построение СДНФ и СКНФ булевой функции по таблице истинности. Примеры. Теорема о функциональной полноте.

21. Исчисление высказываний. Понятие об алфавите, формулах, аксиомах, правилах вывода и основных теоремах исчисления высказываний.

22. Понятие предиката (формы высказывания). Предметные переменные. Одноместные и n-местные предикаты. Тождественно истинные и тождественно ложные высказывания. Примеры.

23. Квантор общности и квантор существования. Примеры. Свободные и связанные переменные. Выполнимые и противоречивые формулы логики предикатов.

24. Равносильные формулы логики предикатов. Примеры. Понятие об исчислении предикатов.

25. Неориентированные графы. Основные понятия: вершины и их степень, ребра, кратные ребра, петли. Матрица смежности неориентированного графа. Примеры.

26. Инцидентность. Матрица инцидентности неориентированного графа. Примеры.

27. Ориентированные графы. Матрица инцидентности орграфа. Примеры.

28. Матрица смежности орграфа. Примеры.

29. Подграфы. Полные графы. Клики. Примеры.

30. Операции над графами: дополнение, объединение и пересечение. Примеры.

31. Маршруты, циклы и цепи в неориентированных графах. Связность.

32. Деревья и их свойства. Направленные деревья.

33. Остовное дерево. Цикломатическое число. Остовное дерево минимальной нагруженности.

34. Двудольные графы. Задача о паросочетаниях.

35. Понятие алгоритма. Основные требования к алгоритмам.

36. Понятие рекурсии. Рекурсивные функции. Связь между алгоритмами и рекурсивными функциями.

37. Операции образования примитивно-рекурсивных и частично-рекурсивных функций. Тезис Чёрча.

38. Простейшие примитивно-рекурсивные функции.

39. Операция суперпозиции (для построения примитивно-рекурсивной функции). Пример.

40. Операция примитивной рекурсии. Пример.

41. Операция минимизации (для построения частично-рекурсивных функций). Пример.

42. Машина Тьюринга. Структура машины Тьюринга.

43. Программы для машины Тьюринга. Универсальная машина Тьюринга.

3. Задачи для самоподготовки

Ниже приведены номера рекомендуемых задач с решениями и для самостоятельного выполнения по учебным пособиям [1], [2].

Тема	Номера задач	
	по учебному пособию [1]	по учебному пособию [2]
1. Множества, функции, отношения	3-е практическое занятие, 1–5 4-е практическое занятие, 4–24	5.1, 13.7, 13.8
2. Комбинаторика	5-е практическое занятие, 1–14	1.10–1.15
3. Математическая логика	1-е практическое занятие, 1–24 2-е практическое занятие, 1–12а	13.1–13.6
4. Теория графов	7-е практическое занятие, 1–16	14.1–14.3
5. Теория алгоритмов	11-е практическое занятие, 1–13 13-е практическое занятие*, 1–7*	14.4*–14.6*

4. Методические указания по выполнению контрольной работы

В соответствии с учебным планом по дисциплине «Дискретная математика» каждый студент должен выполнить домашнюю контрольную работу по приведенным в данной брошюре вариантам в сроки, установленные учебным графиком.

По контрольной работе студенты вечерних и дневных групп проходят собеседование. На собеседовании выясняется, насколько глубоко усвоен пройденный материал и соответствуют ли знания студента и его навыки в решении задач качеству представленной работы. Зачет по контрольной работе студенты получают лишь после успешного прохождения собеседования.

Номер варианта контрольной работы определяется в соответствии с *последней цифрой номера личного дела студента*, который совпадает с номером его зачетной книжки и студенческого билета.

Сроки представления контрольной работы на проверку указаны в индивидуальном графике студента, а студентам дневных групп сообщаются во время осенней установочной сессии. Однако эти сроки являются крайними. Чтобы работа была своевременно проверена, а при необходимости доработана и сдана повторно, ее надлежит представить значительно раньше указанного срока. Студентам дневных групп рекомендуется выполнять контрольную работу во время установочной сессии. Это дает студенту возможность использовать свое пребывание в институте для консультаций по всем вопросам, возникшим в процессе выполнения контрольной работы. После окончания сессии в течение двух недель работу необходимо окончательно завершить, а затем представить на проверку.

Если в процессе выполнения контрольной работы у студента появятся вопросы или возникнут затруднения в решении задач, то он может обратиться за устной или письменной консультацией (например, по электронной почте или на форум кафедры).

При изучении учебного материала и подготовке к контрольной работе рекомендуется использовать учебники, учебные пособия и электронные ресурсы, приведенные в разделе «Литература», а также данную брошюру.

После проверки контрольная работа студента получает оценку «допускается к собеседованию» или «не допускается к собеседованию».

Контрольная работа содержит набор заданий, при выполнении которых необходимо соблюдать следующие правила:

1. Работа должна быть выполнена в школьной тетради, имеющей широкие (не менее 3 см) поля для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради следует указать фамилию, имя, отчество (полностью), факультет, специальность, курс, номер личного дела, вариант и номер контрольной работы, а также фамилию преподавателя, которому данная работа направляется на проверку.

3. Перед решением каждой задачи нужно привести (распечатать) ее условие.

4. При решении заданий следует придерживаться той последовательности, в которой они даны в варианте контрольной работы, и сохранять их нумерацию.

5. Не допускается замена одних заданий контрольной работы другими.

6. Необходимо сопровождать решения задач развернутыми пояснениями, привести в общем виде используемые формулы с объяснением употребляемых обозначений, а окончательный ответ – выделить.

7. В конце работы следует привести список использованной литературы (указывают автора, название, издательство, год издания), поставить дату окончания контрольной работы и подпись.

Если работа в целом получила положительную оценку («допускается к собеседованию»), но в ней есть отдельные недочеты (указанные в тетради), то нужно сделать соответствующие исправления и дополнения в той же тетради (после имеющихся решений и записи «Работа над ошибками») и предъявить доработку на собеседовании.

Если работа получила оценку «не допускается к собеседованию», то ее в соответствии с требованиями преподавателя необходимо частично или полностью переделать. Повторную работу следует выполнить в той же тетради (если есть место) или в новой тетради, сделав на обложке надпись «Повторная» и указав фамилию преподавателя, которым ранее контрольная работа была не зачтена. Вместе с незачтенной работой повторную контрольную работу необходимо снова представить на проверку.

Контрольная работа не засчитывается, если ее вариант не совпадает с последней цифрой номера личного дела студента или она выполнена по вариантам прошлых лет.

Студенты, не получившие зачет по контрольной работе, к экзаменационному зачету не допускаются. Если в соответствии с учебным графиком контрольная работа должна быть выполнена с частичным использованием компьютерной обучающей программы, то для получения зачета необходимо дополнительно представить протокол отчета студента о работе с КОПР. Зачтенные работы предъявляются на экзаменационном зачете и после его успешной сдачи не возвращаются.

Для допуска к экзаменационному зачету необходимо также получить зачет по компьютерному тестированию, если оно предусмотрено учебным графиком по дисциплине «Дискретная математика».

5. Варианты контрольной работы[1]

Вариант 1

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 1)

1. Даны множества чисел $A=\{2,3,5,6\}$, $B=\{5,6,7,8\}$, $C=\{3,4,6,8\}$ и универсальное множество $U=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Найти множества чисел $D=(C\cap B)\cup(B\setminus A)\cup\overline{A\cup C}$, $E=(\overline{A}\cap\overline{C})\cup(C\cap B)$. Являются ли множества E и D равными; эквивалентными; включающими одно другое ($D\subset E$ или $E\subset D$); пересекающимися, но не включающими одно другое; непересекающимися ($D\cap E=\varnothing$)?

2. Двенадцать работников отдела делятся на четыре равные по численности рабочие группы, которые занимаются разными задачами. В каждой группе назначается старший.

[1] Напоминаем, что номер личного дела совпадает с номером студенческого билета и зачетной книжки студента.

Сколько возможно вариантов распределения людей по группам и назначения старшего в каждой группе? Решить задачу, используя комбинаторику.

3. Установить вид формулы алгебры логики:

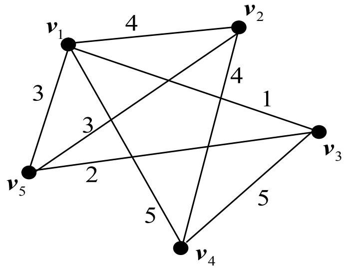
$$L = \big((A \wedge B) \to C\big) \leftrightarrow \big(A \to (B \vee \overline{C})\big).$$

4. Упростить формулу:

$$\varphi = A \wedge (B \to A) \to \overline{A}.$$

Проверить результат, используя таблицу истинности.

5. Для нагруженного графа, представленного на рисунке, построить остовное дерево минимальной стоимости. Определить его стоимость.



6. Определить функцию $f(x, y)$, полученную из функций $g(x) = x$ и $h(x, y, z) = z$ по схеме примитивной рекурсии.

Вариант 2

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 2)

1. Даны множества чисел $A = \{0, 1, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{1, 2, 4, 6\}$ и универсальное множество $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Найти множества чисел $D = \overline{A \cup B} \cup (C \cap B)$, $E = (\overline{B} \cap \overline{A}) \cup (C \cap (B \setminus A))$. Являются ли множества E и D равными;

эквивалентными; включающими одно другое ($D \subset E$ или $E \subset D$); пересекающимися, но не включающими одно другое; непересекающимися ($D \cap E = \varnothing$)?

2. Из 100 работников фирмы 42 владеют английским языком, 30 – французским, 28 – немецким. Десять человек знают английский и немецкий, 8 – французский и немецкий, 5 – английский и французский. Три человека знают все три языка.

Сколько работников фирмы не знают ни одного языка? Решить задачу, используя теорию множеств.

3. Установить вид формулы алгебры логики:

$$L = \left(\left(A \wedge B\right) \vee C\right) \leftrightarrow \left(A \rightarrow \left(B \vee \overline{C}\right)\right).$$

4. С помощью таблицы истинности найти СДНФ и СКНФ булевой функции

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1 \wedge x_2 \rightarrow \left(x_1 \rightarrow \overline{x}_2\right).$$

5. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построить ориентированный граф, для которого матрица A является матрицей смежности. Найти матрицу инцидентности.

Является ли полученный граф связным?

6. Определить функцию $f(x, y)$, полученную из функций $g(x) = x$ и $h(x, y, z) = x + z$ по схеме примитивной рекурсии.

Вариант 3

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 3)

1. Даны множества чисел $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$ и универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Найти множества чисел $D = (A \cap C) \cup \overline{B \cup C}$, $E = (\overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap (C \setminus B))$. Являются ли множества E и D равными; эквивалентными; включающими одно другое ($D \subset E$ или $E \subset D$); пересекающимися, но не включающими одно другое; непересекающимися ($D \cap E = \varnothing$)?

2. На фирму должна приехать проверка из центрального офиса. На проверку могут приехать директор, главный бухгалтер и старший менеджер. Накануне были получены три телеграммы: 1) директор не приедет, а приедет главный бухгалтер; 2) приедут главный бухгалтер и старший менеджер; 3) приедет или директор, или главный бухгалтер. Одна из телеграмм была послана по ошибке. Приехал один проверяющий.

Кто это был? Решить задачу, используя алгебру логики.

3. Установить вид формулы алгебры логики:

$$L = ((A \wedge B) \to C) \vee (A \leftrightarrow (B \vee \overline{C})).$$

4. Упростить формулу:

$$\varphi = (A \to B) \to (\overline{B} \leftrightarrow \overline{A}).$$

Проверить результат, используя таблицу истинности.

5. На множестве $V = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ задано отношение f: $x > y + 1$.

Построить орграф данного отношения.

6. Определить функцию $f(x, y)$, полученную из функций $g(x) = x$ и $h(x, y, z) = x + y - z$ по схеме примитивной рекурсии.

Вариант 4

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 4)

1. Даны множества чисел $A=\{0,1,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, $C=\{1,2,4,6\}$ и универсальное множество $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Найти множества чисел $D=\left(\overline{B\cap C}\setminus A\right)\cup\left(C\setminus B\right)$, $E=\overline{A\cup C}\cup\left(C\cap\overline{B}\right)$. Являются ли множества E и D равными; эквивалентными; включающими одно другое ($D\subset E$ или $E\subset D$); пересекающимися, но не включающими одно другое; непересекающимися ($D\cap E=\varnothing$)?

2. В шахматном турнире по круговой системе участвуют семь шахматистов. Известно, что игрок A сыграл шесть партий, B – пять, C и D – по три, E и F – по две, а G – одну.

С кем сыграл игрок C? Решить задачу, используя теорию графов.

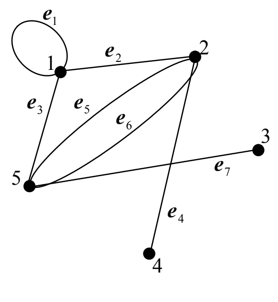
3. Установить вид формулы алгебры логики:

$$L=\left(\left(A\vee\overline{B}\right)\to B\right)\wedge\left(\left(\overline{A}\vee B\right)\leftrightarrow A\right).$$

4. С помощью таблицы истинности найти СДНФ и СКНФ булевой функции

$$f\left(x_1,x_2\right)=\left(x_1\to\overline{x}_2\right)\leftrightarrow\left(\overline{x}_1\vee x_2\right).$$

5. Для графа, представленного на рисунке, найти матрицу смежности и остовное дерево. Определить цикломатическое число.



6. Определить функцию $f(x, y)$, полученную из функций $g(x) = x$ и $h(x, y, z) = z^2$ по схеме примитивной рекурсии.

Вариант 5

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 5)

1. Даны множества чисел $A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$, $C = \{3, 4, 6, 8\}$ и универсальное множество $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Найти множества чисел $D = \overline{A \cup B} \cup (C \cap A)$, $E = ((C \cup \overline{A}) \setminus B) \cup (C \cap A)$. Являются ли множества E и D равными; эквивалентными; включающими одно другое ($D \subset E$ или $E \subset D$); пересекающимися, но не включающими одно другое; непересекающимися ($D \cap E = \varnothing$)?

2. Из 71 школьников в волейбол играют 51, футбол – 45, баскетбол – 31. Во все три игры играют 8 ребят, в волейбол и футбол – 28, волейбол и баскетбол – 20, футбол и баскетбол – 16.

Сколько школьников играют только в баскетбол? Решить задачу, используя теорию множеств.

3. Установить вид формулы алгебры логики:

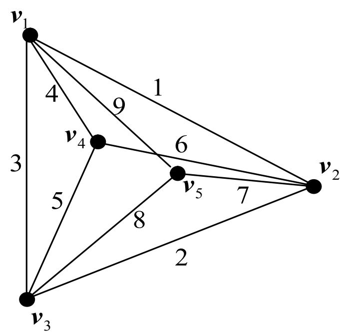
$$L = ((A \leftrightarrow B) \wedge (A \vee C)) \vee (A \to \overline{C}).$$

4. Упростить формулу:

$$\varphi = (A \to (\overline{B} \wedge \overline{A})) \vee B.$$

Проверить результат, используя таблицу истинности.

5. Для нагруженного графа, представленного на рисунке, построить остовное дерево минимальной стоимости. Определить его стоимость.



6. Определить функцию $f(x, y)$, полученную из функций $g(x) = 1$ и $h(x, y, z) = xz$ по схеме примитивной рекурсии.

Вариант 6

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 6)

1. Даны множества чисел $A = \{0, 1, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{1, 2, 4, 6\}$ и универсальное множество $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Найти множества чисел $D = ((A \setminus B) \cap C) \cup \overline{A \cup C}$, $E = (A \cap C) \cup (\overline{A} \setminus (C \cap B))$. Являются ли множества E и D равными; эквивалентными; включающими одно другое ($D \subset E$ или $E \subset D$); пересекающимися, но не включающими одно другое; непересекающимися ($D \cap E = \varnothing$)?

2. Из группы в 15 человек должны быть выделены бригадир и 4 члена бригады.

Сколькими способами это можно сделать? Решить задачу, используя комбинаторику.

3. Установить вид формулы алгебры логики:

$$L = \left(\left(A \wedge B\right) \leftrightarrow C\right) \to \left(A \wedge \left(B \vee \overline{C}\right)\right).$$

4. С помощью таблицы истинности найти СДНФ и СКНФ булевой функции

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1 \vee x_2 \to \left(x_1 \to \overline{x}_2\right).$$

5. Дана матрица:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построить ориентированный граф, для которого матрица B является матрицей инцидентности. Найти матрицу смежности.

6. Определить функцию $f(x, y)$, полученную из функций $g(x) = 1$ и $h(x, y, z) = xy$ по схеме примитивной рекурсии.

Вариант 7

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 7)

1. Даны множества чисел $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$ и универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Найти множества чисел $D = \left(A \cap C\right) \cup \overline{C \cup B}$, $E = \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \left(C \setminus B\right)\right)$. Являются ли множества E и D равными; эквивалентными; включающими одно другое ($D \subset E$ или $E \subset D$); пересекающимися, но не включающими одно другое; непересекающимися ($D \cap E = \varnothing$)?

2. Чемпионат по футболу проводится по круговой системе. За победу в матче дается два очка, за ничью – одно, а за поражение – ноль. Если две команды набирают одинаковое количество очков, то место определяется по разности забитых и пропущенных мячей. Чемпион набрал семь очков, второй призер – пять, третий – три.

Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место? Решить задачу, используя теорию графов.

3. Установить вид формулы алгебры логики:

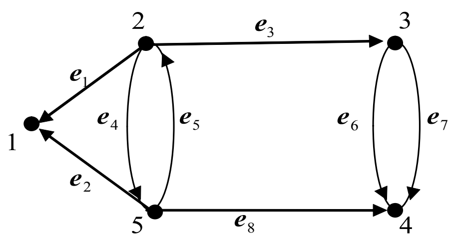
$$L = ((A \vee B) \wedge C) \to (A \leftrightarrow (B \vee \overline{C})).$$

4. Упростить формулу:

$$\varphi = \overline{A \to B} \wedge (B \to \overline{A}).$$

Проверить результат, используя таблицу истинности.

5. Для орграфа, представленного на рисунке, найти матрицу смежности и матрицу инцидентности. Есть ли у данного графа циклы? Если есть, то приведите пример простого цикла.



6. Определить функцию $f(x, y)$, полученную из функций $g(x) = 0$ и $h(x, y, z) = x^2 + z$ по схеме примитивной рекурсии.

Вариант 8

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 8)

1. Даны множества чисел $A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$, $C = \{3, 4, 6, 8\}$ и универсальное множество $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Найти множества чисел $D=(B\cap C)\cup\overline{A\cup C}$, $E=\left(\left(B\cup\overline{C}\right)\setminus A\right)\cup(C\cap B)$. Являются ли множества E и D равными; эквивалентными; включающими одно другое ($D\subset E$ или $E\subset D$); пересекающимися, но не включающими одно другое; непересекающимися ($D\cap E=\varnothing$)?

2. Согласно опросу 250 телезрителей 95 из них нравится смотреть новости, 125 предпочитают смотреть спорт, 125 – комедии, 25 – новости и комедии, 45 – спорт и комедии, 35 – новости и спорт, 5 любят смотреть три вида программ.

Сколько телезрителей смотрят спорт и комедии, но не смотрят новости? Решить задачу, используя теорию множеств.

3. Установить вид формулы алгебры логики:

$$L=\left((A\leftrightarrow B)\wedge C\right)\vee\left(A\rightarrow\left(B\vee\overline{C}\right)\right).$$

4. С помощью таблицы истинности найти СДНФ и СКНФ булевой функции

$$f(x_1,x_2)=x_1\vee x_2\rightarrow(x_1\leftrightarrow x_2).$$

5. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&0&1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&0&1&1\end{pmatrix}.$$

Построить неориентированные графы, для которых матрица A является матрицей смежности, а матрица B – матрицей инцидентности.

6. Определить функцию $f(x, y)$, полученную из функций $g(x) = 1$ и $h(x, y, z) = x/z$ по схеме примитивной рекурсии.

Вариант 9

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 9)

1. Даны множества чисел $A=\{0,1,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, $C=\{1,2,4,6\}$ и универсальное множество $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Найти множества чисел $D=\overline{A\cup B}\cup\left(\overline{C}\cap A\right)$, $E=\left(\overline{A\cap C}\setminus B\right)\cup\left(A\setminus C\right)$. Являются ли множества E и D равными; эквивалентными; включающими одно другое ($D\subset E$ или $E\subset D$); пересекающимися, но не включающими одно другое; непересекающимися ($D\cap E=\varnothing$)?

2. На фирму должна приехать проверка из центрального офиса. На проверку могут приехать директор, главный бухгалтер и старший менеджер. Накануне были получены три телеграммы: 1) приедут или директор, или главный бухгалтер со старшим менеджером; 2) приедут директор и старший менеджер; 3) директор не приедет, приедет главный бухгалтер. Верной была только одна телеграмма. Приехали двое проверяющих.

Кто это был? Решить задачу, используя алгебру логики.

3. Установить вид формулы алгебры логики:

$$L=\left(\left(A\vee\overline{B}\right)\to\left(A\vee B\right)\right)\wedge\left(\overline{A}\leftrightarrow B\right).$$

4. Упростить формулу:

$$\varphi=\left(\left(A\to B\right)\to A\right)\to\overline{A}.$$

Проверить результат, используя таблицу истинности.

5. На множестве $V=\{0;1;2;3;4\}$ задано отношение $f\colon x=y(\mathrm{mod}\ 2)$.

Построить неориентированный граф данного отношения. Является ли этот граф связным? Найти максимальную клику полученного графа.

6. Определить функцию $f(x, y)$, полученную из функций $g(x) = 0$ и $h(x,y,z) = |z - x|$ по схеме примитивной рекурсии.

Вариант 10

(*для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 0*)

1. Даны множества чисел $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$ и универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Найти множества чисел $D = (A \cap B) \cup (A \setminus C) \cup \overline{B \cup C}$, $E = (\overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap A)$. Являются ли множества E и D равными; эквивалентными; включающими одно другое ($D \subset E$ или $E \subset D$); пересекающимися, но не включающими одно другое; непересекающимися ($D \cap E = \varnothing$)?

2. Из лаборатории, в которой работает 20 человек, 5 сотрудников должны уехать в командировку. Сколько может быть различных составов этой группы, если начальник лаборатории, его заместитель и главный инженер одновременно уезжать не должны?

Решить задачу, используя комбинаторику.

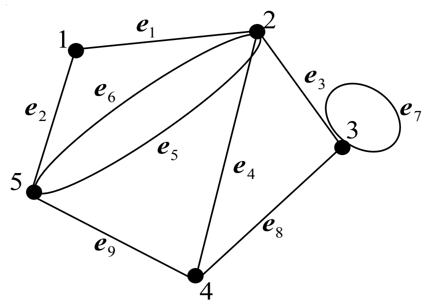
3. Установить вид формулы алгебры логики:

$$L = ((A \leftrightarrow B) \to C) \wedge (A \to (B \vee \overline{C})).$$

4. С помощью таблицы истинности найти СДНФ и СКНФ булевой функции

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2) \to (x_2 \to x_1).$$

5. Для графа, представленного на рисунке, найти матрицу смежности и матрицу инцидентности. Привести пример максимальной клики.



6. Определить функцию $f(x, y)$, полученную из функций $g(x) = 0$ и $h(x, y, z) = x + y$ по схеме примитивной рекурсии.

Литература

Основная

1. **Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н.** Конспект лекций по дискретной математике. – М.: АЙРИС-пресс, 2007.
2. **Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М.** Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справочное пособие / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Юрайт-издат, 2012.

Дополнительная

3. **Гисин В.Б.** Лекции по дискретной математике. Ч. 1, 2. – М.: Финакадемия, 2003.
4. **Кузнецов О.П.** Дискретная математика для инженера. – СПб.: Лань, 2009.
5. **Москинова Г.И.** Дискретная математика для менеджера в примерах и упражнениях. – М.: Логос, 2007.
6. **Палий И.А.** Дискретная математика: Курс лекций. – М.: Эксмо, 2008.
7. **Плотников А.Д.** Дискретная математика. – М.: Новое знание, 2008.
8. **Тюрин С.В., Аляев Ю.А.** Дискретная математика: Практическая дискретная математика и математическая логика. – М.: Финансы и статистика : ИНФРА-М, 2010.
9. **Шапорев С.Д.** Дискретная математика: Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2009.

Электронные ресурсы

1. Компьютерная обучающая программа по дисциплине «Дискретная математика» / Н.Ш. Кремер, И.М. Эйсымонт, А.В. Потемкин, Н.И. Федорова. – URL: http://repository.vzfei.ru. Доступ по логину и паролю.

2. Дискретная математика: учебно-методическое пособие / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ВЗФЭИ, 2012. – URL: http://repository.vzfei.ru. Доступ по логину и паролю.

3. **Кремер Н.Ш., Эйсымонт И.М.** Математика: Методические указания по проведению и выполнению контрольных работ с частичным использованием КОПР. – М.: ВЗФЭИ, 2009. – URL: http://repository.vzfei.ru. Доступ по логину и паролю.

4. Электронные тестовые базы LAN-TESTING и STELLUS. – URL: http://stellus.ru.

5. Библиотекарь.Ру: [Электронная библиотека]. – URL: http://www.bibliotekar.ru. Доступ свободный.

Содержание

Дискретная математика. Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов второго курса, обучающихся по направлению 080500.62 «Бизнес-информатика», квалификация (степень) бакалавр / под ред. профессора Н.Ш. Кремера. – М.: ВЗФЭИ, 2012.

Редактор Т.А. Балашова
Корректор О.Н. Крендясова
Компьютерная верстка О.В. Белынской

ЛР ИД № 00009 от 25.08.99 г.

Подписано в печать 04.07.12. Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Усл.-печ. л. 4,5.
Изд. № 1/64-12.
Тираж 200 экз. Заказ № 2589.

Редакционно-издательский отдел
Всероссийского заочного
финансово-экономического института (ВЗФЭИ)
Олеко Дундича, 23, Москва, Г-96, ГСП-5, 123995

Для заметок

Для заметок