МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«ВСЕРОССИЙСКИЙ ЗАОЧНЫЙ
ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие
для студентов второго курса,
обучающихся по направлению 080500.62
«Бизнес-информатика»

**Квалификация (степень)
бакалавр**

Под редакцией профессора Н.Ш. Кремера

**Факультет менеджмента и маркетинга
Кафедра высшей математики**

Москва 2012

ББК 22.161

Учебно-методическое пособие подготовили:
содержание дисциплины и методические указания:
профессор ***Н.Ш. Кремер*** – введение, тема 1,
доцент ***Л.Р. Борисова*** – темы 2–5,
профессор ***И.М. Тришин*** – темы 6, 7;
варианты контрольной работы:
доцент ***Л.Р. Борисова*** (г. Москва), доцент ***Б.А. Путко*** (г. Москва),
профессор ***И.М. Тришин*** (г. Москва),
доцент ***М.Н. Фридман*** (г. Москва),
доцент ***А.Ю. Шевелев*** (г. Москва), доцент ***Е.В. Манохин*** (г. Тула)

Учебно-методическое пособие обсуждено
на заседании кафедры высшей математики
Зав. кафедрой профессор ***Н.Ш. Кремер***

Учебно-методическое издание одобрено
на заседании Учебно-методического совета ВЗФЭИ

И.о. проректора, председатель УМС ***В.П. Белгородцев***

Дифференциальные и разностные уравнения. Учебно-методическое пособие для студентов второго курса, обучающихся по направлению 080500.62 «Бизнес-информатика», квалификация (степень) бакалавр / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ВЗФЭИ, 2012.

В учебно-методическом пособии приведен обзор основных понятий и положений дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения», даны методические рекомендации по ее изучению, выделены типовые задачи с решениями, представлены контрольные вопросы для самопроверки и задачи для самоподготовки, приведены варианты контрольной работы, а также методические указания по ее выполнению.

ББК 22.161

Введение

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования (ФГОС-3) студенты второго курса, обучающиеся по направлению 080500.62 «Бизнес-информатика», квалификация (степень) бакалавр, изучают дисциплину «Дифференциальные и разностные уравнения».

Целью изучения данной дисциплины является освоение студентами математического аппарата, позволяющего анализировать, моделировать и решать прикладные, в том числе экономические, задачи.

Основной принцип, лежащий в основе преподавания дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения», состоит в повышении уровня фундаментальной математической подготовки студентов с усилением ее прикладной экономической направленности.

Задачи изучения дисциплины вытекают из требований к результатам освоения и условиям реализации основной образовательной программы и компетенций, установленных ФГОС-3 по направлению 080500.62 «Бизнес информатика», и включают:

• освоение общих методов решения дифференциальных и разностных уравнений;

• формирование навыков моделирования реальных (экономических) объектов и процессов с использованием дифференциальных и разностных уравнений;

• развитие логического и алгоритмического мышления студентов, повышение уровня их математической культуры;

• развитие навыков самостоятельного изучения учебной и научной литературы.

Знания, полученные студентами в процессе изучения дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения», необходимы для построения и исследования математических моделей прикладных задач, рассматриваемых в ряде дисциплин профессионального цикла.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих общекультурных и профессиональных компетенций, которыми в соответствии с требованиями ФГОС-3 должен обладать бакалавр бизнес-информатики:

• владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу и восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-1);

• способность логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь (ОК-6);

• способность к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства (ОК-9);

• способность к организованному подходу к освоению и приобретению новых навыков и компетенций (ОК-17);

• навыки использования основных методов естественно-научных дисциплин для теоретического и экспериментального исследования (ПК-19);

• навыки использования соответствующего математического аппарата и инструментальных средств для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования (ПК-20);

• навыки подготовки научно-технических отчетов, презентаций и научных публикаций по результатам выполненных исследований (ПК-21).

В результате изучения дисциплины студент должен:

а) **знать**:

• основные понятия дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения», используемые для построения и исследования прикладных (экономических) задач;

б) **уметь**:

• применять методы решения дифференциальных и разностных уравнений для построения и исследования прикладных (экономических) задач.

в) **владеть**:

• навыками решения дифференциальных и разностных уравнений.

1. Краткие сведения о комплексных числах

Прежде чем перейти к содержанию дисциплины, приведем краткие сведения о комплексных числах (см. подробнее [1, § 12.2, 16.1], [3, § 15.1, 15.2]).

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – мнимая единица. Число x называется *действительной частью*, а y – *мнимой частью* числа z.

Действительное число x является частным случаем комплексного числа $z = x + iy$ при $y = 0$. Если $y \neq 0$, то комплексные числа вида $z = x + iy$ называются *мнимыми*, а числа вида $z = iy$ (при $x = 0$, $y \neq 0$) – *чисто мнимыми*.

Числа $z = x + iy$ и $z = x - iy$ называют *комплексно-сопряженными*.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ *равны*, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Число $z = 0$, если $x = 0$, $y = 0$. Отношений «больше», «меньше» для комплексных чисел не существует.

Все арифметические операции над комплексными числами z_1 и z_2 проводятся по правилам действий над многочленами $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$, считая $i^2 = -1$.

Комплексные числа изображаются точками на координатной плоскости Oxy, называемой *комплексной плоскостью*. Оси Ox и Oy, на которых расположены действительные числа $z = x + 0i = x$ и чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$, называются соответственно *действительной* и *мнимой осями*.

Комплексное число в *тригонометрической форме* имеет вид

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа;

φ – аргумент комплексного числа:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Комплексное число в *показательной форме* имеет вид

$$z = re^{i\varphi}.$$

Связь между тригонометрической и показательной формами комплексного числа осуществляется с помощью *формулы Эйлера*:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

2. Содержание дисциплины и методические рекомендации по ее изучению

Ниже по каждой теме приводится учебно-программный материал, который должен изучить студент, со ссылками на рекомендованные учебники и учебные пособия.

Контрольные вопросы по каждой теме представлены в разделе 3 «Вопросы для самопроверки».

Рекомендуемые по каждой теме задачи с решениями и для самостоятельной работы приведены в разделе 4 «Задачи для самоподготовки».

Указания по выполнению контрольных работ с частичным использованием КОПР даны в брошюре «Математика. Методические указания по проведению и выполнению контрольных работ с использованием КОПР» [Электронные ресурсы, 3].

Раздел I. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения связывают искомую функцию одной переменной с производными (или дифференциалами) различных порядков. К построению математических моделей, основой которых являются дифференциальные уравнения, приводит как исследование природных процессов, так и изучение закономерностей развития общества, проблем инфляции, экономического роста, безработицы и др.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка $G\left(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}\right)=0$ называется решение $y=\varphi\left(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n\right)$, содержащее n независимых произвольных постоянных $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$.

Частное решение дифференциального уравнения получается из общего при некоторых конкретных числовых значениях этих постоянных, определяемых с помощью начальных условий.

Тема 1. Дифференциальные уравнения первого порядка и методы их решения

Общие сведения о дифференциальных уравнениях. Примеры математических моделей в экономике, описываемых дифференциальными уравнениями. Общие понятия для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (решение уравнения, интегральная кривая, задача Коши для уравнения в нормальной форме). Типы уравнений первого порядка и методы их решения (уравнение с разделяющимися переменными, однородное уравнение, уравнение в полных дифференциалах). Линейное уравнение первого порядка. Метод вариации произвольной постоянной. Уравнение Бернулли ([1, § 12.1, 12.2, 12.4–12.6], [2, § 12.1–12.4], [3, § 12.1, 12.2, 12.4–12.6, 12.11–12.15]).

Изучение темы начинается с примеров математических моделей в экономике, описываемых дифференциальными уравнениями. В качестве таких примеров в учебниках [1, 3] рассматриваются задачи построения математических моделей демографического процесса (§ 12.1) и экономической динамики (§ 12.9).

Для построения указанных моделей обычно определяют математическую зависимость между переменными величинами и их приращениями, которые затем заменяют их дифференциалами. На следующем этапе проводят интегрирование полученного дифференциального уравнения и находят его общее и частное решения.

Задача Коши – это задача отыскания частного решения дифференциального уравнения $y' = f(x,\ y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$. При достаточно часто встречающихся условиях (наличии в некоторой области непрерывных функции $f(x,y)$ и ее частной производной $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$) на основании теоремы существования и единственности решения ([1, § 12.2], [2, § 12.2]) задача Коши имеет единственное решение. Геометрически это означает, что через каждую точку данной области проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения $y' = f(x,\ y)$.

Следует отметить, что вопрос о единственности решения задачи Коши представляет не только теоретический, но и практический интерес. Ведь в этом случае получен единственный закон, описывающий исследуемое явление (объект), которое определяется только дифференциальным уравнением, соответствующим данному явлению (объекту) и конкретным начальным данным.

▷ **Пример 1.** Пусть $K(t)$ – величина основных фондов фирмы в стоимостном выражении в момент времени t. Известно, что выбытие основных фондов происходит равномерно с коэффициентом пропорциональности $\mu = 0,02$, а их увеличение – так же равномерно в результате ежегодных инвестиций $i = 1000$ ден. ед. с коэффициентом $\rho = 0,05$. В начальный момент времени величина основных фондов составляла $K_0 = 5000$ ден. ед.

Определить зависимость величины основных фондов $K(t)$ от времени.

Р е ш е н и е. За время Δt величина основных фондов $K = K(t)$ уменьшилась за счет их выбытия на $K\mu\Delta t$ ден. ед. и увеличилась за счет ежегодных инвестиций на $\rho i\Delta t$ ден. ед., то есть изменение величины основных фондов $\Delta K = -\mu K\Delta t + \rho i\Delta t$, или

$$\Delta K + \mu K\Delta t = \rho i\Delta t. \quad \textbf{(1)}$$

Разделив равенство **(1)** на $\Delta t \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} + \mu K = \rho i. \quad \textbf{(2)}$$

Равенство **(2)** будет тем точнее, чем меньше Δt. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{dK}{dt} + \mu K = \rho i. \quad \textbf{(3)}$$

Итак, математической моделью движения основных фондов будет уравнение **(3)** и задача свелась к его решению, удовлетворяющему начальному условию

$$K(0) = K_0. \quad \textbf{(4)}$$

Уравнение **(3)** – это линейное уравнение первой степени, которое может быть решено методом произведения ([1, § 12.6], [3, § 12.6]) или методом вариации произвольной постоянной.

Решим уравнение **(3)** *методом вариации произвольной постоянной.*

1. Составим линейное однородное уравнение с левой частью, совпадающей с уравнением **(3)**, и нулевой правой частью:

$$\frac{dK}{dt} + \mu K = 0. \quad \textbf{(5)}$$

Очевидно, что уравнение **(5)** – это уравнение с разделяющимися переменными, которое преобразуется к виду $\frac{dK}{dt} = -\mu\, dt$, откуда после интегрирования (при $K \neq 0$) и преобразований получаем

$$K = Ce^{-\mu t}. \quad \textbf{(6)}$$

2. Теперь будем полагать, что $C \neq \text{const}$, а $C = C(t)$ – некоторая функция от t, и необходимо отыскать такую функцию $\tilde{C}(t)$, кото-

рая после подстановки решения **(6)** в исходное уравнение **(3)** обратит его в верное равенство. С учетом того, что теперь $K = Ce^{-\mu t} = \tilde{C}(t)e^{-\mu t}$, уравнение **(3)** примет вид

$$\tilde{C}'e^{-\mu t} - \mu\tilde{C}e^{-\mu t} + \mu\tilde{C}e^{-\mu t} = \rho i,$$

откуда

$$\tilde{C}'e^{-\mu t} = \rho i,\ \tilde{C}' = \rho i e^{\mu t},$$

$$\tilde{C}(t) = \int \rho i e^{\mu t} dt = \frac{\rho i}{\mu} e^{\mu t} + C.$$

Теперь по формуле **(6)** находим

$$K(t) = \tilde{C}(t)e^{-\mu t} = \frac{\rho i}{\mu} + Ce^{-\mu t}. \qquad \textbf{(7)}$$

При $\mu = 0{,}02$, $\rho = 0{,}05$, $i = 1000$ получим $K(t) = 2500 + Ce^{-0{,}02t}$.

3. Учитывая начальное условие $K(0) = 5000$ или $2500 + C =$ $= 5000$, найдем С = 2500 и $K(t) = 2500\left(1 + e^{-0{,}02t}\right)$.▶

Студент должен уметь решать дифференциальные уравнения первого порядка различных типов (неполные, с разделяющимися переменными, однородные, в полных дифференциалах, линейные, уравнения Бернулли) соответствующими методами, включая метод вариации произвольной постоянной, и уметь составлять математические модели задач, описываемые дифференциальными уравнениями.

Тема 2. Дифференциальные уравнения второго и высших порядков

Общие понятия (*решение дифференциального уравнения, начальные значения для дифференциального уравнения в нормальной форме*). *Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Понятие о дифференциальных уравнениях высших порядков* ([1, § 12.7, 12.8], [2, § 12.5, 12.6], [3, § 12.7, 12.8, 12.15, 12.16]).

Решение обыкновенного дифференциального уравнения высшего порядка – это непрерывно дифференцируемая функция, причем столько раз, каков порядок уравнения. В задаче Коши для уравнений высших порядков начальные условия формулируются не только для искомой функции, но и для всех ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно (n – порядок дифференциального уравнения).

В ряде случаев дифференциальное уравнение второго порядка может быть приведено к дифференциальному уравнению первого порядка. Например, если уравнение явно не содержит искомой функции (являющейся решением уравнения), то заменой первой производной на новую переменную получают дифференциальное уравнение первого порядка ([1, примеры 12.14, 12.15], [3, примеры 12.14, 12.15, 12.88, 12.89]).

Если дифференциальное уравнение второго порядка является однородным по искомой функции и ее обеим производным, то заменой первой производной на произведение искомой функции на другую непрерывно дифференцируемую функцию получают уравнение первого порядка.

▷**Пример 2.** Решить уравнение $x^2yy''-5xyy'-x^2y'^2=6y^2$.

Р е ш е н и е. Заметим, что $y=0$ – решение уравнения. Пусть далее $y\neq 0$. Убедившись в однородности по y, y', y'' заданного уравнения, вводим новую функцию z с помощью равенства $y'=yz$. После сокращения на $y\neq 0$ получаем уравнение $x^2z'-5xz=6$.

Общим решением этого линейного дифференциального уравнения первого порядка является $z=Cx^5-\dfrac{1}{x}$. Отсюда и из замены находим, что $\dfrac{y'}{y}=Cx^5-\dfrac{1}{x}$.

Решая это уравнение, получаем

$$y = \frac{C_1}{x} e^{C_2 x^6},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. ▶

Когда дифференциальное уравнение второго порядка представляет собой уравнение в точных производных, можно перейти к равенству производных некоторых функций, причем после интегрирования такого равенства получается уравнение первого порядка.

▷ **Пример 3.** Решить уравнение $yy'' + y'^2 = y'$.

Р е ш е н и е. Исходное уравнение можно представить в виде $(yy')' = y'$. После интегрирования уравнения получаем $yy' = y + C_1$. Решением этого уравнения первого порядка будет постоянная величина $y = -C_1$. Если $y \neq -C_1$, то получаем уравнение $\frac{y\,dy}{y + C_1} = dx$, которое легко интегрируется. В результате интегрирования находим общий интеграл дифференциального уравнения второго порядка:

$$y - C_1 \ln|y + C_1| = x + C_2.$$ ▶

Тема 3. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения. Методы нахождения частных решений неоднородного дифференциального уравнения ([1, § 12.8], [2, § 12.6], [3, § 12.8, 12.16]).

В данной теме рассматриваются однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами второго и высших порядков.

Студентам следует освоить форму записи линейного однородного уравнения порядка *n* с постоянными коэффициентами при помощи линейного *дифференциального оператора* и уметь использовать свойство линейности этого оператора.

Необходимо уметь сформулировать принцип суперпозиции для линейных однородных дифференциальных уравнений порядка *n*.

Особенностью линейных однородных дифференциальных уравнений является то, что функция, тождественно равная нулю, является их решением.

Надо уяснить, что если искать решение таких уравнений в виде экспоненциальной функции с показателем λx, то после подстановки данной функции и ее производных в линейное однородное дифференциальное уравнение и сокращения на $e^{\lambda x}$ получается характеристическое уравнение.

Отметим, что характеристическое уравнение дифференциального уравнения второго порядка может иметь два различных корня, один корень или не иметь действительных корней. Необходимо помнить, какой вид имеет общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в этом случае.

▷ **Пример 4.** Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $y'' - 6y' + 8y = 0$; б) $y'' + 4y' + 4y = 0$; в) $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Р е ш е н и е. а) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ имеет два различных действительных корня $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$.

б) Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ имеет действительный корень кратности 2, то есть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -2$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = e^{-2x}\left(C_1 x + C_2\right)$.

в) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ имеет комплексные корни, то есть $\lambda_1 = 2 + 3i$, $\lambda_2 = 2 - 3i$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = e^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$.▶

▷ **Пример 5.** Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 3y' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 0$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{-3x} + C_2$. Тогда $y' = -3C_1 e^{-3x}$. Подставив в общее решение начальные условия, получим систему

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ -3C_1 = 3, \end{cases}$. Отсюда $C_1 = -1$, $C_2 = -3$.

Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = 3 - e^{-3x}$. ▶

Принцип суперпозиции используется для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Если заданную непрерывную функцию из правой части таких уравнений можно представить в виде суммы непрерывных функций, то находится не одно, а несколько частных решений в зависимости от числа слагаемых. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного(ых) решения(ий) неоднородного уравнения.

Следует знать правило подбора частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' + ay' + by = f(x)$ представим в виде суммы общего решения однородного уравнения $y''+ay'+by=0$ и частного решения неоднородного.

В случае, когда $f(x)$ – многочлен и число 0 не является корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного дифференциального уравнения следует искать в виде многочлена той же степени, что и $f(x)$.

Если число 0 является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного дифференциального уравнения ищется в виде $xP(x)$, где $P(x)$ – многочлен той же степени, что и $f(x)$.

Если число 0 – корень характеристического уравнения кратности 2 (в этом случае характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2=0$ и $\lambda_1=\lambda_2=0$), то частное решение неоднородного дифференциального уравнения ищется в виде $x^2P(x)$, где $P(x)$ – многочлен той же степени, что и $f(x)$.

▷ **Пример 6.** Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $y''-6y'+9y=2x$; б) $y''-y'=x$.

Р е ш е н и е. а) Решим соответствующее однородное дифференциальное уравнение $y''-6y'+9y=0$.

Его характеристическое уравнение $\lambda^2-6\lambda+9=0$ имеет корень $\lambda=3$ кратности 2. Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид $y=e^{-3x}\left(C_1x+C_2\right)$. Правая часть неоднородного дифференциального уравнения – многочлен первой степени $f(x)=2x$, поэтому его частное решение будем искать в виде $y=Ax+B$. Подставив в уравнение $y=Ax+B$, $y'=A$, $y''=0$, получим

$$-6A+9\left(Ax+B\right)=2x.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, находим $A=\dfrac{2}{9}$, $B=\dfrac{4}{27}$.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид $y=\frac{2}{9}x+\frac{4}{27}$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y=e^{-3x}\left(C_1x+C_2\right)+\frac{2}{9}x+\frac{4}{27}.$$

б) Решим соответствующее однородное уравнение $y''-y'=0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2-\lambda=0$ имеет два корня – $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=0$.

Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид $y=C_1e^x+C_2$.

Правая часть неоднородного дифференциального уравнения $f(x)=x$ – многочлен первой степени. Так как число 0 является корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде $y=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$. Подставив в уравнение y, $y'=2Ax+B$, $y''=2A$, получим $2A-(2Ax+B)=x$.

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, находим $A=-\frac{1}{2}$, $B=-1$.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид $y=-\frac{x^2}{2}-x$.

Запишем общее решение неоднородного дифференциального уравнения как сумму общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений:

$$y=C_1e^x+C_2-\frac{x^2}{2}-x. \blacktriangleright$$

В случае, когда правая часть уравнения есть квазимногочлен[1] вида $f(x) = P_m(x)e^{\mu x}$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m, поиск решения зависит от того, является ли μ корнем характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения ($\mu = \lambda$). Этот случай называется *резонансным*.

При различных значениях λ_1 и λ_2, то есть когда только один из корней совпадает с μ, частное решение неоднородного дифференциального уравнения следует искать в виде $y = xP_m(x)e^{\mu x}$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$, то частное решение неоднородного дифференциального уравнения следует искать в виде $y = x^2 P_m(x)e^{\mu x}$.

Если корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные, а правая часть уравнения $f(x) = a\sin\omega x + b\cos\omega x$ и $\lambda^2 = -\omega^2$, то частное решение неоднородного дифференциального уравнения следует искать в виде $y = x(A\sin\omega x + B\cos\omega x)$. При отсутствии резонанса ($\lambda^2 \neq -\omega^2$) частное решение неоднородного дифференциального уравнения совпадает с видом функции $f(x) = a\sin\omega x + b\cos\omega x$ и его следует искать в виде $f(x) = A\sin\omega x + B\cos\omega x$.

В конце темы излагается метод вариации произвольных постоянных для решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, позволяющий для любых непрерывных функций из правой части уравнения получать решение неоднородного уравнения, если соответствующее однородное дифференциальное уравнение решено ([1, пример 12.18], [3, пример 12.18)].

---

[1] *Квазимногочленом* является функция вида $f(x) = e^{\lambda_1 x}P_1(x) + e^{\lambda_2 x}P_2(x) + \ldots + e^{\lambda_k x}P_k(x)$, где λ_1, λ_2, ..., λ_k – постоянные, $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_k(x)$ – многочлены.

Тема 4. Системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Методы решения систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ([3, § 12.18]).

При изучении материала темы следует освоить векторную форму записи заданной линейной однородной системы n уравнений с постоянными коэффициентами: $\overrightarrow{y'(x)} = A\,\overrightarrow{y(x)}$.

Очевидно, что нулевой вектор – решение такой системы.

Ненулевой вектор, являющийся решением системы, представляет собой произведение экспоненты на собственный вектор матрицы коэффициентов системы: $\overrightarrow{y(x)} = e^{\lambda x}\vec{h}$.

Собственный вектор может быть найден, если известно собственное значение матрицы A – число λ.

Для решений таких систем справедлив принцип суперпозиции. Если собственные векторы матрицы постоянных коэффициентов образуют базис в R^n, то все решения системы имеют вид

$$\overrightarrow{y(x)} = C_1 e^{\lambda_1 x}\vec{h}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}\vec{h}_2 + C_3 e^{\lambda_3 x}\vec{h}_3 + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}\vec{h}_n.$$

Тема 5. Элементы качественного анализа систем автономных дифференциальных уравнений

Качественный анализ систем автономных (*стационарных*) *обыкновенных дифференциальных уравнений на примере уравнений первого порядка. Общие понятия и свойства* (*решение системы, фазовая траектория, положения равновесия, циклы*). *Устойчивые и неустойчивые положения равновесия* ([1, § 12.3], [3, § 12.3]).

При изучении материала темы следует понять, что правые части нормальных автономных систем дифференциальных уравнений не содержат независимой переменной, по которой ведется дифференцирование. Эту систему можно представить в векторном виде $\overrightarrow{x'(t)} = \vec{f}(\vec{x})$, где $\vec{f}(\vec{x})$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция[1] в некоторой области $G \subset R^n$. Вектор $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ – решение такой системы – называется *фазовой кривой*, или *траекторией*, а пространство R^n – *фазовым пространством*.

Всякое решение системы вида $\vec{x}(t) = \vec{x}_0$ для всех значений t называется *положением равновесия*. Необходимо четко понимать критерий положения равновесия: $\vec{f}(\vec{x}_0) = 0$.

Любая фазовая траектория нормальной автономной системы принадлежит к одному из трех типов:

1) положение равновесия;

2) замкнутая траектория, отвечающая периодическому решению системы;

3) траектория без самопересечений.

Основываясь на этом свойстве траекторий, надо уметь выполнять классификацию положений равновесия линейной системы уравнений второго порядка в предположении, что собственные значения λ матрицы коэффициентов системы не являются кратными и нулевыми. При этом предположении определитель матрицы коэффициентов не равен нулю и точка (0; 0) является единственным положением равновесия системы.

Студенту следует знать, что при наличии действительных собственных значений матрицы коэффициентов положение равновесия (0; 0) может быть устойчивым или неустойчивым узлом, а если собственные значения имеют разные знаки, то положение равновесия (0; 0) называется *седлом*. В случае комплексных корней особый интерес представляет положение равновесия (0; 0) – центр, являющийся промежуточным между устойчивым и неустойчивым фокусом, когда возможна *бифуркация* – переход из устойчивого в неустойчивое положение равновесия, и наоборот при малом изменении параметров системы.

---

[1] *Вектор-функция* – функция, значениями которой являются векторы в векторном пространстве V двух, трех или более измерений. Аргументами функции могут быть одна скалярная переменная, несколько скалярных переменных, векторная переменная.

Раздел II. Разностные (рекуррентные) уравнения[1]

Тема 6. Разностные (рекуррентные) уравнения первого порядка

Примеры математических моделей в экономике, описываемых разностными уравнениями. Общие понятия для рекуррентного уравнения первого порядка в нормальной форме (*решение уравнения, начальные условия, задачи Коши, решение рекуррентного уравнения методом подстановки*). *Линейные уравнения первого порядка* (*арифметическая и геометрическая прогрессии, частичные суммы и произведения, метод вариации постоянной*) ([5, § 6.10], [8, § 8.3, 8.5]).

Разностные уравнения играют важную роль в экономической теории. В терминах этих уравнений формулируются и доказываются многие экономические законы. Например, описание динамики изменения банковского вклада при заданной периодичности начисления процентов описывается разностным уравнением, решением которого является геометрическая прогрессия. Предположение, что объем потребления запаздывает по отношению к величине национального дохода, приводит к разностному уравнению модели экономического цикла Самуэльсона–Хикса. Изменение рыночной цены моделируется разностным уравнением паутинообразной модели рынка (см. с. 30–31).

Численное интегрирование произвольного дифференциального уравнения сводится к решению некоторого разностного уравнения.

Разностным уравнением k-го порядка называется уравнение вида

$$F\big(n, y(n), y(n+1), \ \ldots, \ y(n+k)\big) = 0, \qquad \textbf{(8)}$$

где $n = 1, \ 2, \ \ldots$

Очевидно, что $y(n)$ как функция, определенная на множестве натуральных чисел, является примером числовой последовательности, поэтому в дальнейшем будем использовать обозначение $y_n = y(n)$.

---

[1] Поскольку данный материал недостаточно отражен в литературе, содержание раздела II дается более подробно.

Решением разностного уравнения **(8)** называется такая числовая последовательность $\{y_n\}$, при подстановке которой в формулу **(8)** получается тождество. *Общее решение* произвольного разностного уравнения k-го порядка будет зависеть от k произвольных постоянных.

Решение, получаемое из общего решения при некоторых конкретных числовых значениях этих постоянных, называется *частным решением*. Для выделения однозначного частного решения разностного уравнения k-го порядка в общем случае следует дополнительно задать k так называемых *начальных условий*. Задача о нахождении частного решения разностного уравнения при заданных начальных условиях называется *задачей Коши для разностных уравнений*.

Важным частным случаем разностных уравнений являются *линейные разностные уравнения*, то есть уравнения вида

$$a_k(n)y_{n+k} + a_{k-1}(n)y_{n+k-1} + \ldots + a_0(n)y_n = f_n, \qquad \textbf{(9)}$$

где $a_j(n)$, f_n – известные числовые последовательности (функции на множестве натуральных чисел), $j = 0, 1, 2, \ldots, k$, $n = 1, 2, \ldots$; $a_k(n)$, $a_0(n)$ отличны от нуля при всех n, а y_n – неизвестная последовательность.

Например, равенство

$$\sin(2n+3)y_{n+2} - \sqrt{n}y_{n+1} + 5y_n = f_n,$$

где $n = 1, 2, \ldots,$ – линейное разностное уравнение второго порядка.

В силу того что функции $a_k(n)$ предполагаются отличными от нуля, уравнение **(9)** может быть переписано в виде

$$y_{n+k} = f_n - b_{k-1}(n)y_{n+k-1} - \ldots - b_0(n)y_n, \qquad \textbf{(10)}$$

где $b_0(n)$, $b_1(n)$, ..., $b_{k-1}(n)$ – известные числовые последовательности.

Уравнение **(10)** называется линейным разностным уравнением k-го порядка, записанным в *нормальной форме*.

Если в качестве начальных условий использованы $y_1, y_2, ..., y_k$, то значения y_n при $n > k$ находятся последовательно одно за другим с помощью уравнения **(10)**. В этом смысле говорят, что разностное уравнение **(10)** задает *рекуррентную*, или *возвратную*, последовательность.

Линейное разностное уравнение называется *однородным*, если значения f_n, стоящие в правой части равенства **(9)**, равны нулю при любых n (другими словами, последовательность f_n состоит только из нулей); в противном случае линейное разностное уравнение называется *неоднородным*.

Линейное разностное уравнение называется *линейным уравнением с постоянными коэффициентами*, если оно имеет вид **(9)**, причем последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_k$ являются постоянными (не зависят от n, то есть $a_0, a_1, \ldots, a_k$ – некоторые действительные числа).

Рассмотрим сначала линейное разностное уравнение первого порядка, то есть уравнение вида

$$y_{n+1} + b_n y_n = f_n, \qquad \textbf{(11)}$$

где b_n, f_n – некоторые известные последовательности.

Заметим, что при $b_n = -1$, $f_n = d$, где d – некоторое число, уравнение **(11)** задает арифметическую прогрессию с разностью d. При $b_n = -q$, $f_n = 0$ уравнение **(11)** задает геометрическую прогрессию со знаменателем q. При $b_n = -1$, $f_n = g_{n+1}$ y_n есть n-я частичная сумма числового ряда

$$\sum_{t=1}^{\infty} g_t.$$

Решение однородного разностного уравнения первого порядка, то есть уравнения вида

$$y_{n+1} + b_n y_n = 0, \qquad \textbf{(12)}$$

где $b_n \neq 0$ при $n = 1, 2, \ldots$, может быть найдено методом последовательных подстановок. В результате получаем

$$y_n = Cd_n, \qquad \textbf{(13)}$$

где $C = y_1$, $d_1 = 1$, $d_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \dots b_{n-1} = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} b_i$, $n = 2, 3, \dots$

Заметим, что выражение **(13)** есть общее решение уравнения **(12)**. Роль произвольной постоянной, от которой зависит это решение, в данном случае выполняет $C = y_1$.

Из **(12)** и **(13)**, в частности, следует, что элементы последовательности d_n удовлетворяют уравнению **(12)**, то есть справедливы равенства

$$d_{n+1} = -b_n d_n. \qquad \textbf{(14)}$$

Решение неоднородного уравнения **(11)** может быть найдено, например, *методом вариации постоянной*. Для этого будем искать решение уравнения **(11)** в виде **(13)**, предполагая, что множитель C зависит от n, то есть $C = c_n$.

Подставляя **(13)** в **(11)**, получим

$$c_{n+1} d_{n+1} + b_n c_n d_n = f_n,$$

или, принимая во внимание **(14)**:

$$c_{n+1} = c_n + \frac{f_n}{d_{n+1}}.$$

Отсюда следует, что

$$c_n = c_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f_i}{d_{i+1}}, \qquad \textbf{(15)}$$

где $n = 2, 3, \dots$

Подставляя $C = c_n$ из **(15)** в **(13)**, получаем общее решение линейного неоднородного уравнения **(11)** первого порядка:

$$y_n = c_1 d_n + d_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f_i}{d_{i+1}}, \qquad \textbf{(16)}$$

где $c_1 = y_1$, $n = 2, 3, \dots$

Решение **(16)** есть общее решение неоднородного уравнения **(11)**, зависящее от произвольной постоянной y_1.

Как было отмечено выше, первое слагаемое $c_1 d_n$ решения **(16)** уравнения **(11)** есть общее решение соответствующего однородного уравнения, а второе слагаемое решения **(16)** – некоторое частное решение уравнения **(11)**. Эта важная особенность структуры решения линейного неоднородного уравнения первого порядка сохраняется и для линейных неоднородных уравнений произвольных порядков.

▷ **Пример 7.** Решить уравнение

$$y_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} y_n + \frac{1}{(n+2)2^n}.$$

Р е ш е н и е. В данном случае

$$d_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \ldots b_{n-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} = \frac{2}{n+1}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{f_i}{d_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i+2}{(i+2)2^{i+1}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{2^n - 2}{2^n}.$$

Таким образом, решение **(16)** принимает вид

$$y_n = \left(y_1 + 1 - 2^{1-n}\right) \cdot \frac{2}{n+1}. \blacktriangleright$$

При изучении материала студенты должны обратить внимание на основные определения, относящиеся к разностным уравнениям, и освоить решение разностного уравнения первого порядка методом вариации постоянной.

Тема 7. Линейные разностные (рекуррентные) уравнения с постоянными коэффициентами

Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Методы нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения ([8, § 8.4]).

Дадим общее описание решения линейного разностного уравнения **(9)**. По аналогии со случаем линейных дифференциальных уравнений справедливы следующие теоремы.

□ **Теорема 1.** Если $y_{1,n}$, $y_{2,n}$, ..., $y_{n,n}$ – линейно независимые решения линейного однородного разностного уравнения n-го порядка, то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y_{0,n} = C_1 y_{1,n} + C_2 y_{2,n} + \ldots + C_n y_{n,n},$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные. ■

□ **Теорема 2.** Пусть $\tilde{y}_n$ – некоторое решение линейного неоднородного уравнения **(9)**, а $y_{0,n} = y_{0,n}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения. Тогда общее решение y_n уравнения **(9)** может быть записано в виде

$$y_n = y_{0,n}(C_1, \ldots, C_n) + \tilde{y}_n . \blacksquare$$

Перейдем к рассмотрению линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, то есть уравнений вида

$$y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + a_0 y_n = f_n, \qquad \textbf{(17)}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ – некоторые действительные числа, причем $a_0 \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + a_0 y_n = 0. \qquad \textbf{(18)}$$

Описание решений уравнения **(18)** дадим для случаев $k = 1$ и $k = 2$.

При $k = 1$ это уравнение имеет вид

$$y_{n+1} + p y_n = 0, \qquad \textbf{(19)}$$

где p – некоторое действительное число, а его общее решение является частным случаем формулы **(13)**:

$$y_n = C(-p)^n, \qquad \textbf{(20)}$$

где C – произвольная постоянная.

Уравнение **(18)** при $k=2$ равносильно уравнению

$$y_{n+2}+py_{n+1}+qy_n=0, \qquad \textbf{(21)}$$

где p, q – некоторые действительные числа, причем $q \neq 0$.

Многочлен $\lambda^2+p\lambda+q$ называется *характеристическим многочленом* уравнения **(21)**. Соответственно, *характеристическим* для разностного уравнения **(21)** называется алгебраическое уравнение

$$\lambda^2+p\lambda+q=0. \qquad \textbf{(22)}$$

□ **Теорема 3.** 1. Пусть характеристическое уравнение **(22)** имеет действительные корни λ_1 и λ_2, не равные между собой. Тогда общее решение уравнения **(21)** имеет вид

$$y_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n.$$

2. Если характеристическое уравнение **(22)** имеет один корень λ (кратности 2), то общее решение уравнения **(21)** имеет вид

$$y_n=C_1\lambda^n+C_2n\lambda^n.$$

3. Если характеристическое уравнение **(22)** имеет комплексные корни $\lambda_{1,2}=\alpha \pm i\beta$, то общее решение уравнения **(21)** имеет вид

$$y_n=C_1\rho^n\cos n\varphi+C_2\rho^n\sin n\varphi,$$

где ρ – модуль комплексного числа $\alpha+i\beta$;

φ – аргумент комплексного числа $\alpha+i\beta$. ■

▷ **Пример 8.** Решить уравнение

$$y_{n+2}-y_{n+1}-y_n=0, \qquad \textbf{(23)}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y_1=y_2=1$. Заметим, что искомая последовательность называется *последовательностью чисел Фибоначчи*.

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид

$$\lambda^2-\lambda-1=0.$$

Его действительные корни $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ различны, а потому общее решение разностного уравнения **(23)** задается формулой

$$y_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Принимая во внимание начальные условия, для нахождения C_1 и C_2 имеем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1, \\ C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $C_1 = 1/\sqrt{5}$, $C_2 = -1/\sqrt{5}$. Таким образом, искомое частное решение разностного уравнения **(23)** имеет вид

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \blacktriangleright$$

Рассмотрим теперь способы решения неоднородного уравнения **(17)**. Подобно тому, как это было сделано выше для уравнений первого порядка, решить такое уравнение можно методом вариации постоянной. Другой способ решения использует теорему 2 и связан с возможностью нахождения частного решения неоднородного уравнения при специальном виде правой части f_n.

□ **Теорема 4.** Пусть в уравнении **(17)** $f_n = g_r(n)\mu^n$, где $g_r(n)$ – некоторый многочлен от n степени r, а μ – действительное число.

Если число μ не является корнем характеристического многочлена уравнения **(17)**, то это уравнение имеет частное решение вида

$$\tilde{y}_n = h_r(n)\mu^n, \qquad \textbf{(24)}$$

где $h_r(n)$ – некоторый многочлен от n степени r.

Если μ является корнем характеристического многочлена уравнения **(17)** кратности l, то это уравнение имеет частное решение вида

$$\tilde{y}_n = n^l h_r(n)\mu^n, \qquad \textbf{(25)}$$

где $h_r(n)$ – некоторый многочлен от n степени r. ■

▷ **Пример 9.** Решить уравнение

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3y_n = n \cdot 2^n. \qquad \textbf{(26)}$$

Р е ш е н и е. Характеристический многочлен данного уравнения имеет вид

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3.$$

Его корнями являются $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -3$.

Согласно теореме 3 общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_{0,n} = C_1 + C_2 \cdot (-3)^n.$$

Согласно теореме 4 частное решение исходного (неоднородного) уравнения **(26)** может быть найдено в виде

$$\tilde{y}_n = (\alpha n + \beta) \cdot 2^n$$

для подходящих действительных чисел α и β.

Подставляя выражение для $\tilde{y}_n$ в **(26)** и учитывая, что данное равенство должно оставаться справедливым при любых значениях n, для нахождения α и β получаем следующую систему:

$$\begin{cases} 5\alpha = 1, \\ 12\alpha + 5\beta = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\alpha = 1/5$, $\beta = -12/25$. Окончательное общее решение уравнения **(26)**:

$$y_n = C_1 + C_2 \cdot (-3)^n + \left(\frac{n}{5} - \frac{12}{25}\right) \cdot 2^n . \blacktriangleright$$

▷ **Пример 10.** Решить уравнение

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = n . \qquad \mathbf{(27)}$$

Р е ш е н и е. В данном случае характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Его корнями являются $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$.

Согласно теореме 3 общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_{0,n} = C_1 + C_2 \cdot 2^n .$$

Правая часть уравнения **(27)** имеет вид $n = n \cdot 1^n$. Поскольку $\lambda_1 = 1$ – корень характеристического уравнения кратности 1, то согласно теореме 4 частное решение исходного (неоднородного) уравнения **(27)** может быть найдено в виде

$$\tilde{y}_n = n \cdot (\alpha n + \beta) = \alpha n^2 + \beta n.$$

Подставляя это выражение для $\tilde{y}_n$ в **(27)** и учитывая, что полученное равенство должно оставаться справедливым при любых значениях *n*, для определения α и β имеем систему

$$\begin{cases} -2\alpha = 1, \\ -\alpha - \beta = 0, \end{cases}$$

откуда $\alpha = -1/2$, $\beta = 1/2$.

Окончательное общее решение уравнения **(27)**:

$$y_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n + n \cdot \left(-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right). \blacktriangleright$$

Замечание. Пусть «неоднородность» (правая часть) f_n уравнения **(17)** является суммой некоторых последовательностей, то есть

$$f_n = g_n + h_n .$$

Тогда по аналогии со случаем дифференциальных уравнений частное решение уравнения **(17)** может быть найдено как сумма частных решений уравнения, полученных для неоднородностей g_n и h_n.

Приведем пример использования разностных уравнений для моделирования экономических процессов.

Пусть $p(t)$, $s(t)$, $d(t)$ – соответственно цена, предложение и спрос некоторого товара в момент времени t. В общем случае предложение (спрос) представляет собой возрастающую (убывающую) функцию цены. Дополнительно будем предполагать, что переменная t является *дискретной* (это естественно, если ситуация на рынке анализируется в конце очередного расчетного отрезка времени, например месяца). Кроме того, будем считать, что предложение является запаздывающей функцией времени на одну единицу продолжительности производственного цикла.

Рассматривая простейшую (линейную) модель зависимости спроса и предложения от цены, имеем

$$s(t) = ap(t-1) + b , \qquad \textbf{(28)}$$

$$d(t) = -mp(t) + n , \qquad \textbf{(29)}$$

где a, b, m, n – положительные числа и $n > b$, так как при нулевой цене спрос превышает предложение.

В случае *равновесного* рынка спрос равен предложению, и из **(28)**, **(29)** следует, что

$$mp(t) + ap(t-1) = n - b , \qquad \textbf{(30)}$$

то есть приходим к разностному неоднородному уравнению первого порядка.

Частным решением этого уравнения служит постоянная функция

$$\tilde{p} = \frac{n-b}{m+a} .$$

Учитывая **(20)** и теорему 4 об описании общего решения неоднородного разностного уравнения, получаем общее решение уравнения **(30)**:

$$p(t)=C\left(-\frac{a}{m}\right)^t+\tilde{p}.$$

Обычно на практике $\frac{a}{m}<1$, поэтому $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\tilde{p}$, то есть с течением времени текущая цена $p(t)$ стремится к равновесной цене $\tilde{p}$. Так как $\frac{a}{m}>0$, то текущее значение цены колеблется около значения $\tilde{p}$.

Рассмотренная модель называется *паутинообразной моделью рынка*.

При изучении данной темы студенты должны усвоить понятия линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами (однородного и неоднородного), характеристического уравнения, методы нахождения общего решения однородного разностного уравнения и частного решения неоднородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами.

3. Вопросы для самопроверки

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (определение, порядок уравнения, общее и частное решения (интегралы), интегральная кривая). Примеры.

2. Общие понятия для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (общее и частное решения уравнения, интегральная кривая). Примеры.

3. Задача Коши для уравнения первого порядка в нормальной форме. Теорема существования и единственности решения. Примеры несуществования единственного решения.

4. Примеры математических моделей в экономике, описываемых дифференциальными уравнениями. Задача о построении математической модели демографического процесса.

5. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными (определение, метод решения). Примеры.

6. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка (определение, методы решения). Примеры.

7. Дифференциальные уравнения первого порядка в полных дифференциалах (определение, метод решения). Примеры.

8. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка (определение, решение в виде произведения двух функций). Примеры.

9. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка (определение, решение методом вариации произвольной постоянной). Примеры.

10. Уравнения Бернулли (определение, сведение к линейному уравнению с помощью замены переменной). Примеры.

11. Уравнения Бернулли (определение, решение методом вариации постоянной). Примеры.

12. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго и высших порядков (определение, решение методом понижения порядка, примеры). Нормальная форма начальных условий.

13. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Алгоритм построения общего решения при отсутствии кратных корней характеристического уравнения. Примеры.

14. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Алгоритм построения общего решения при наличии кратных корней характеристического уравнения. Примеры.

15. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Принцип суперпозиции. Подбор частного решения, когда правая часть уравнения – квазимногочлен. Примеры.

16. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Принцип суперпозиции. Подбор частного решения, когда правая часть уравнения – линейная комбинация тригонометрических функций. Примеры.

17. Системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Методы решения систем. Примеры.

18. Качественный анализ систем автономных дифференциальных уравнений первого порядка. Общие понятия и свойства (решение системы, фазовая траектория, устойчивые и неустойчивые положения равновесия, циклы).

19. Разностные (рекуррентные) уравнения первого порядка. Нормальная форма разностного уравнения, общие понятия (общее и частное решения, начальные условия, задача Коши). Примеры.

20. Решение разностных уравнений первого порядка методом подстановки. Примеры.

21. Решение разностных уравнений первого порядка методом вариации постоянной. Примеры.

22. Примеры математических моделей в экономике, описываемых разностными уравнениями. Паутинообразная модель рынка.

23. Линейные однородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Алгоритм построения общего решения. Примеры.

24. Линейные неоднородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами. Принцип суперпозиции. Подбор частного решения, когда правая часть уравнения – квазимногочлен. Примеры.

25. Линейные неоднородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами. Принцип суперпозиции. Подбор частного решения, когда правая часть уравнения – линейная комбинация тригонометрических функций. Примеры.

4. Задачи для самоподготовки

Ниже приведены номера задач с решениями и для самостоятельного выполнения по рекомендованным учебникам и учебным пособиям.

Студентам в первую очередь следует разобрать *большинство* (*часть*) *задач* с решениями (их номера выделены **полужирным** шрифтом), а затем выборочно решить задачи для самостоятельного выполнения (их номера набраны обычным шрифтом).

Кроме того, уровень усвоения материала раздела I можно проверить по приводимым в практикуме [2] или учебнике [3] тематическим контрольным заданиям и тестам.

№ темы	Название темы	Номера задач			
		по учебнику [1]	по практикуму [2]	по учебнику [3]	по учебному пособию [4]
Раздел 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения					
1	Дифференциальные уравнения первого порядка и методы их решения	**12.2–12.5, 12.8–12.13, 12.23, 12.24**	**12.1–12.4, 12.15, 12.16, 12.31, 12.32, 12.48, 12.49, 12.91–12.93**	**12.1–12.5, 12.8–12.13, 12.16–12.24, 12.30–12.32, 12.43, 12.44, 12.59, 12.60, 12.73–12.75, 12.119–12.121**	–
		12.25–2.36, 12.30–12.48, 12.65, 12.66	12.5–12.14, 12.17–12.30, 12.33–12.44, 12.50, 12.94–12.105, 12.107, 12.108, 12.110, 12.111	12.45–12.58, 12.61–12.72, 12.76–12.87, 12.122–12.131, 12.140–12.142, 12.144–12.162	–
2	Дифференциальные уравнения второго и высших порядков	**12.14, 12.15**	**12.60, 12.61**	**12.14, 12.15, 12.29, 12.88, 12.89**	–
		12.49–12.52	12.62–12.71	12.30, 12.37, 12.42, 12.90–12.99	–
3	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	**12.16–12.22**	**12.73–12.77**	**12.100–12.105**	–
		12.53–12.64	12.78–12.89, 12.106, 12.109, 12.112, 12.114–12.118	12.106–12.117, 12.163–12.179	–
4, 5	Системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Элементы качественного анализа систем автономных дифференциальных уравнений	**12.6, 12.7**	**–**	**12.6, 12.7, 12.25–12.28, 12.132, 12.133**	–
		–	–	12.134–12.139, 12.143	–

№ темы	Название темы	Номера задач			
		по учебнику [1]	**по практикуму [2]**	**по учебнику [3]**	**по учебному пособию [4]**
Раздел 2. Разностные (рекуррентные) уравнения					
6	Разностные (рекуррентные) уравнения первого порядка	**–**	**–**	**–**	**8.1, 8.16**
		–	**–**	**–**	8.2–8.14, 8.17
7	Линейные разностные (рекуррентные) уравнения с постоянными коэффициентами	**–**	**–**	**–**	**8.20, 8.21, 8.31–8.33**
		–	–	–	8.22–8.30, 8.34–8.50

5. Методические указания по выполнению контрольной работы

В соответствии с учебным планом по дисциплине «Дифференциальные и разностные уравнения» каждый студент должен выполнить домашнюю контрольную работу по приведенным в данной брошюре вариантам в сроки, установленные учебным графиком.

По контрольной работе студенты вечерних и дневных групп проходят собеседование. На собеседовании выясняется, насколько глубоко усвоен пройденный материал и соответствуют ли знания студента и его навыки в решении задач качеству представленной работы. Зачет по контрольной работе студенты получают лишь после успешного прохождения собеседования.

Номер варианта контрольной работы определяется в соответствии с *последней цифрой номера личного дела студента*, который совпадает с номером его зачетной книжки и студенческого билета.

Если в процессе выполнения контрольной работы у студента появятся вопросы или возникнут затруднения в решении задач, то он может обратиться за устной или письменной консультацией (например, по электронной почте или на форум кафедры).

При изучении учебного материала и подготовке к контрольной работе рекомендуется использовать учебники, учебные пособия и электронные ресурсы, приведенные в разделе «Литература», а также данную брошюру.

После проверки контрольная работа студента получает оценку «допущена к собеседованию» или «не допущена к собеседованию».

Контрольная работа содержит набор заданий, при выполнении которых необходимо соблюдать следующие правила:

1. Работа должна быть выполнена в школьной тетради, имеющей широкие (не менее 3 см) поля для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради следует указать фамилию, имя, отчество (полностью), факультет, специальность, курс, номер личного дела, вариант и номер контрольной работы, а также фамилию преподавателя, которому данная работа направляется на проверку.

3. Перед решением каждой задачи нужно привести (распечатать) ее условие.

4. При решении заданий следует придерживаться той последовательности, в которой они даны в варианте контрольной работы, и сохранять их нумерацию.

5. Не допускается замена одних заданий контрольной работы другими.

6. Необходимо сопровождать решения задач развернутыми пояснениями, привести в общем виде используемые формулы с объяснением употребляемых обозначений, а окончательный ответ – выделить.

7. В конце работы следует привести список использованной литературы (указывают автора, название, издательство, год издания), поставить дату окончания работы и подпись.

Если работа в целом получила положительную оценку («допущена к собеседованию»), но в ней есть отдельные недочеты (указанные в тетради), то нужно сделать соответствующие исправления и дополнения в той же тетради (после имеющихся решений и записи «Работа над ошибками») и предъявить доработку на собеседовании.

Если работа получила оценку «не допущена к собеседованию», то ее в соответствии с требованиями преподавателя необходимо частично или полностью переделать. Повторную работу следует выполнить в той же тетради (если есть место) или в новой тетради, сделав на обложке надпись «Повторная» и указав фамилию преподавателя, которым ранее работа была не зачтена. Вместе с незачтенной работой повторную работу необходимо снова представить на проверку.

Контрольная работа не засчитывается, если ее вариант не совпадает с последней цифрой номера личного дела студента или она выполнена по вариантам прошлых лет.

Студенты, не получившие зачет по контрольной работе, к экзамену не допускаются. Если в соответствии с учебным графиком контрольная работа должна быть выполнена с частичным использованием КОПР, то для получения зачета необходимо дополнительно представить протокол отчета о работе с КОПР. Зачтенные работы предъявляются на экзамене и после его успешной сдачи не возвращаются.

6. Варианты контрольной работы[1]

Вариант 1

(*для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 1*)

1. Решить дифференциальное уравнение

$$y'\sqrt{1+x^4}+x\left(1+e^y\right)=0.$$

2. Решить дифференциальное уравнение

$$y'-\frac{y}{x}=xe^{2x},$$

используя метод вариации произвольной постоянной.

3. Решить дифференциальное уравнение

$$y''-3y'+2y=e^{2x}\sin x.$$

4. Эластичность $E_p(q)=\dfrac{p}{q}q'$ спроса q по цене p равна 0,8. При цене p = 32 спрос равен 16.

Чему равен спрос при цене p = 19?

5. Найти частное решение разностного уравнения

$$y_{n+2}-y_n=n\cdot 2^n,$$

удовлетворяющее начальным условиям y_1= 0, y_2= 1.

[1] Напоминаем, что номер личного дела совпадает с номером студенческого билета и зачетной книжки студента.

Вариант 2

(*для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 2*)

1. Решить дифференциальное уравнение

$$\left(x^2-2xy\right)dx+x^2dy=0.$$

2. Решить дифференциальное уравнение

$$xy'+y=xy^2\ln x,$$

используя метод вариации произвольной постоянной.

3. Решить дифференциальное уравнение

$$y''-9y=xe^{3x}.$$

4. Эластичность $E_x\left(q\right)=\dfrac{x}{q}q'$ спроса q по доходу x представляет собой функцию вида $E_x\left(q\right)=0{,}1x+0{,}01x^2$. При доходе $x=10$ спрос равен 200.

При каком значении дохода спрос возрастет в два раза?

5. Найти общее решение разностного уравнения

$$y_{n+2}-3y_{n+1}+2y_n=2\cdot 3^n+1.$$

Вариант 3

(*для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 3*)

1. Решить дифференциальное уравнение

$$y'+\frac{y}{x}=-xy^2.$$

2. Решить дифференциальное уравнение

$$y'+2xy=2xe^{-x^2},$$

используя метод вариации произвольной постоянной.

3. Решить дифференциальное уравнение

$$y''-5y'=2x^2+3.$$

4. Эластичность $E_p(q) = \frac{p}{q} q'$ спроса q по цене p определяется функцией вида $E_p(q) = 10 - p$. При цене $p = 6$ спрос q равен 5.

Чему равен спрос при цене $p = 9$?

5. Найти общее решение разностного уравнения

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = n \cdot 2^n + 3.$$

Вариант 4

(*для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 4*)

1. Решить дифференциальное уравнение

$$2x^3 y' = y(2x^2 - y^2).$$

2. Решить дифференциальное уравнение

$$xy' + \frac{y}{x-1} = \frac{x^2(2x-1)}{x-1},$$

используя метод вариации произвольной постоянной.

3. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = 8xe^{2x}.$$

4. Зависимости функции спроса y и предложения x от времени t имеют вид

$$y = 50 - 2p - 4\frac{dp}{dt}, \quad x = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt},$$

где p – цена товара.

В начальный момент времени равновесная цена, при которой $y = x$, была равна 10.

Найти значение равновесной цены в момент времени $t = 1$.

5. Найти общее решение разностного уравнения

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = 54n^2.$$

Вариант 5

(*для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 5*)

1. Решить дифференциальное уравнение

$$\left(e^x+1\right)^2 y'+\left(e^{2x}-1\right)y=0.$$

2. Решить дифференциальное уравнение

$$y'-xy=-xy^3,$$

используя метод вариации произвольной постоянной.

3. Решить дифференциальное уравнение

$$y''+4y=2\cos 2x.$$

4. Зависимость числа жителей региона y (тыс. человек) от времени t (лет) задается функцией вида

$$\frac{dy}{dt}=0{,}2y-2\cdot 10^{-6}y^2.$$

Известно, что в начальный момент времени в регионе проживало 50 тыс. человек.

Найти число жителей региона через пять лет.

5. Найти общее решение разностного уравнения

$$y_{n+2}+y_{n+1}-6y_n=3\cdot 2^n+n.$$

Вариант 6

(*для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 6*)

1. Решить дифференциальное уравнение

$$\left(2x+y+2\right)\,dx-\left(4x+2y+9\right)\,dy=0.$$

2. Решить дифференциальное уравнение

$$y'-\frac{y}{2x}=\frac{x}{2y},$$

используя метод вариации произвольной постоянной.

3. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' + 5y = x + 4e^{-x}.$$

4. Издержки y при производстве x единиц некоторой продукции удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 1.$$

Величина издержек при выпуске 10 единиц продукции составила 100 ден. единиц.

Какими будут издержки при выпуске 12 единиц продукции?

5. Найти общее решение разностного уравнения

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 3 \cdot 2^n + n.$$

Вариант 7

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 7)

1. Решить дифференциальное уравнение

$$\left(x^2 + y^2\right)y' = 2xy.$$

2. Решить дифференциальное уравнение

$$y' + xy = (x-1)e^x y^2,$$

используя метод вариации произвольной постоянной.

3. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y' + 13y = 13x^2.$$

4. Издержки y при производстве x единиц некоторой продукции удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + 1.$$

Величина издержек при выпуске 10 единиц продукции составила 2 ден. единицы.

Какими будут издержки при выпуске 15 единиц продукции?

5. Найти частное решение разностного уравнения

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 12y_n = (2n+3)\cdot 2^n,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y_1 = 0$, $y_2 = 0$.

Вариант 8

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 8)

1. Решить дифференциальное уравнение

$$\left(y^3+1\right)\ln x = y^2\sqrt{x}y'.$$

2. Решить дифференциальное уравнение

$$y' + y = y^2 e^{-2x},$$

используя метод вариации произвольной постоянной.

3. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 5y = e^x \cos 2x.$$

4. Величина издержек y при производстве x единиц продукции удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x.$$

Найти издержки при выпуске 15 единиц продукции, если $y(10) = 600$.

5. Найти частное решение разностного уравнения

$$y_{n+2} + 3y_{n+1} - 4y_n = 6\cdot 2^n + (-1)^n,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y_1 = 0$, $y_2 = 0$.

Вариант 9

(*для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 9*)

1. Решить дифференциальное уравнение

$$y' - 2xy = \sqrt{x}e^{x^2}.$$

2. Решить дифференциальное уравнение

$$y' + 2xy = 2x^3y^3,$$

используя метод вариации произвольной постоянной.

3. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + y = 3x - \sin 2x.$$

4. Зависимость объема реализованной продукции y от времени t задается уравнением вида

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}4 \cdot (3 - 2y) \cdot y.$$

Найти $y(2)$, если $y(0) = 1$.

5. Найти частное решение разностного уравнения

$$y_{n+2} - 2\sqrt{3}y_{n+1} + 4y_n = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y_1 = 1$, $y_2 = 0$.

Вариант 10

(*для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 0*)

1. Решить дифференциальное уравнение

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{y^2 - 9x^2}\,dx.$$

2. Решить дифференциальное уравнение

$$y' - y = \frac{e^x}{x},$$

используя метод вариации произвольной постоянной.

3. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 8y' + 16y = 4xe^{4x}.$$

4. Закон изменения прибыли y от величины вложений x имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = f(t),$$

где $t = y/x$ – отнесенная прибыль.

Экспериментально установлено, что $f(t) = t - 0{,}1 \cdot e^{t}$.

Найти $y(60)$, если $y(50) = 100$.

5. Найти общее решение разностного уравнения

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 16y_{n} = (n+1) \cdot 2^{n}.$$

Литература

Основная[1]

1. Высшая математика для экономистов: учебник / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010.
2. Высшая математика для экономистов: Практикум / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010.
3. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Юрайт-издат, 2012.

Дополнительная

1. **Ахтямов А.М.** Математика для социологов и экономистов: учебное пособие. – М.: Физматлит, 2008.
2. **Красс М.С.** Математика для экономических специальностей: учебник. – М.: ИНФРА-М, 2010.
3. **Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М.** Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справочное пособие / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Юрайт-издат, 2012.
4. **Панюкова Т.А.** Основы теории дифференциальных уравнений для экономистов. – М.: Либроком, 2011.
5. **Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В.** Математика в экономике: учебник. Часть 2. – М.: Финансы и статистика : ИНФРА-М, 2007.

[1] Студенту предлагаются на выбор пособия [1] и [2] или [3], при этом возможно использование указанных учебников и учебных пособий предыдущих лет издания.

Электронные ресурсы

1. Компьютерная обучающая программа по дисциплине «Дифференциальные и разностные уравнения» / Н.Ш. Кремер, Л.Р. Борисова, И.М. Тришин, М.Н. Фридман, А.Ю. Шевелев; под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ВЗФЭИ, 2012. – URL: http://repository.vzfei.ru. Доступ по логину и паролю.

2. Дифференциальные и разностные уравнения: учебно-методическое пособие / под ред. Н.Ш. Кремера – М.: ВЗФЭИ, 2012. – URL: http://repository.vzfei.ru. Доступ по логину и паролю.

3. **Кремер Н.Ш., Эйсымонт И.М.** Математика: Методические указания по проведению и выполнению контрольных работ с частичным использованием КОПР. – М.: ВЗФЭИ, 2009. – URL: http://repository.vzfei.ru. Доступ по логину и паролю.

4. Электронные тестовые базы LAN-TESTING и STELLUS. – URL: http://stellus.ru.

5. Библиотекарь.Ру: [Электронная библиотека]. – URL: http://www.bibliotekar.ru.

Содержание

Введение 3
1. Краткие сведения о комплексных числах 5
2. Содержание дисциплины и методические рекомендации
по ее изучению 6
3. Вопросы для самопроверки 31
4. Задачи для самоподготовки 33
5. Методические указания по выполнению контрольной
работы 35
6. Варианты контрольной работы 37
Литература 45

Дифференциальные и разностные уравнения. Учебно-методическое пособие для студентов второго курса, обучающихся по направлению 080500.62 «Бизнес-информатика», квалификация (степень) бакалавр / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ВЗФЭИ, 2012.

Редактор Т.А. Балашова
Корректор О.Э. Стрекачёва
Компьютерная верстка О.В. Белынской

ЛР ИД № 00009 от 25.08.99 г.

Подписано в печать 26.04.12. Формат $60 \times 90^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Усл.-печ. л. 3,0.
Изд. № 1/63-12.
Тираж 200 экз. Заказ № 2481.

Редакционно-издательский отдел
Всероссийского заочного
финансово-экономического института (ВЗФЭИ)
Олеко Дундича, 23, Москва, Г-96, ГСП-5, 123995